

Х. Модели пространственной микродисперсии в гомогенных водоносных горизонтах

проф. Румынин В.Г.

Х.1. Основное уравнение пространственного (3D) конвективно-дисперсионного переноса вещества в одномерном (1D) фильтрационном потоке

Для прогнозирования развития трехмерных ореолов рассеяния используются аналитические решения уравнения конвективной дисперсии в одномерном (плоскопараллельном) фильтрационном потоке, которое в общем трехмерном (3D) случае имеет вид:

$$nR \frac{\partial C}{\partial t} + v \frac{\partial C}{\partial x} - D_{ex} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - D_{ey} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - D_{ez} \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \lambda nRC = 0, \quad (\text{X.1})$$

где n – пористость, v – скорость фильтрации Дарси, $D_{ex} = \delta_L v + D_{em}$, $D_{ey} = \delta_T v + D_m$, $D_{ez} = \delta_T v + D_{em}$ – коэффициенты продольной и поперечной (плановой и профильной) гидродисперсии, D_{em} – коэффициент эффективной молекулярной диффузии, R – фактор сорбционной задержки, λ – константа распада. В такой, классической, формулировке, наряду с продольной и поперечной дисперсией, учитывается равновесная сорбция растворенного вещества и его распад как в растворенном, так и в адсорбированном состоянии.

В большинстве зарубежных публикаций чаще используются «поровые» аналоги эффективных коэффициентов:

$$u = \frac{v}{n}, \quad D_l = \frac{D_{el}}{n}, \quad D_m = \frac{D_{em}}{n} \quad (\text{X.1a})$$

– поровая (действительная) скорость фильтрации, поровый коэффициент гидродисперсии и молекулярной диффузии. В этом случае уравнение (X.1) трансформируется к виду:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{u}{R} \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{D_x}{R} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{D_y}{R} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \frac{D_z}{R} \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \lambda C = 0. \quad (\text{X.2})$$

Основные решения этого уравнения подразделяются в зависимости от геометрической формы источника вещества, характера входного концентрационного сигнала, а также геометрии области фильтрации (потоки в неограниченных и ограниченных естественными геологическими границами областях). Кроме того, конечные аналитические соотношения могут различаться в зависимости от использованных математических методов решения краевых задач.

В предельном варианте, когда на фоне интенсивного развития поперечного рассеяния собственно продольной дисперсией можно пренебречь, многие приближенные аналитические решения дают неизменные во времени значения концентрации для всей области, оставшейся за фронтом поршневого вытеснения (ut/R). Поэтому они могут быть представлены в эквивалентной форме (Мироненко, Румынин, 1986):

$$C(x, y, z, t) = C(y, z, t_0) \Big|_{t_0 = xR/u}, \quad (\text{X.3})$$

что позволяет найти концентрацию на фронте поршневого вытеснения в любой расчетный момент времени $t = t_0$. Например, для ниже рассматриваемой аппроксимации Доменико (Domenico, Robbins, 1985; Srinivasan et al., 2007):

$$C(x, y, z, t) = C_0 f_x^0(x, t) \times f_y(y, x) \times f_z(z, x), \quad (\text{X.4})$$

причем
$$f_x^0(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{если } t \leq xR/u, \\ 1 & \text{если } t > xR/u \end{cases} \quad (\text{X.4a})$$

– ступенчатая функция; здесь $f_y(y, x)$ и $f_z(z, x)$ – частные решения одномерных задач для y и z направлений (см. далее).

Решения, полученные для стабильных компонентов, $C(\lambda = 0)$, с постоянной граничной концентрацией, C_0 , могут использоваться для нахождения решений, отвечающих источникам с экспоненциально затухающим входным концентрационным сигналом:

$$C(\lambda > 0) = \exp(-\lambda t) \times C(\lambda = 0), \quad (\text{X.5})$$

при этом полагается, что значения констант распада в источнике, λ_s , и в пласте, λ , равны. Случай $\lambda \neq \lambda_s$ будет рассмотрен отдельно.

К базовым решениям относятся решения, полученные для точечных источников, – импульсного (C_i) и постоянно действующего (C). Записав решение для функции C_i относительно единичной массы инъецированного раствора ($M = 1$), можно получить решение для точечного источника, имеющего переменную (меняющуюся во времени) интенсивность $q_p(t) = dM(t)/dt$, посредством использования интегрального равенства

$$C = \int_0^t q_p C_i'(t - \tau) d\tau \quad (\text{X.6})$$

($C_i' = C_i(M = 1)$) или для источника с постоянной интенсивностью ($dM/dt = \text{const}$):

$$C = q_p \int_0^t C_i'(t - \tau) d\tau. \quad (\text{X.6a})$$

При длительной миграции, за счет поперечной дисперсии и распада вещества возможно образование квазистационарных объемных ореолов рассеяния, концентрация в пределах которых остается практически неизменной в каждой точке ореола. Поэтому для анализа миграционных процессов полезными оказываются стационарные асимптотики $C(t \rightarrow \infty)$. Более того, при существенном развитии поперечного рассеяния вещества ролью продольной гидродисперсии можно пренебречь. В этом случае представляют интерес модели поршневого вытеснения ($D_x \rightarrow 0$).

В целом, анализ существующих асимптотических решений и соответствующих им распределений концентрации для центральных осей ореолов ($y = 0, z = 0$), формирующихся от источников с постоянной интенсивностью, показывает, что для двумерного рассеяния $C \sim 1/\sqrt{x}$, а для трехмерного – $C \sim 1/x$, т.е. с увеличением мерности миграционного потока пространственный градиент концентрации вещества возрастает; иными словами, при трехмерном рассеянии должна наблюдаться максимальная степень локализации ореола вблизи источника. Для импульсных источников в задачах двумерного рассеяния $C_{\max} \sim 1/t$, а при трехмерном рассеянии – $C_{\max} \sim 1/t\sqrt{t}$ (Мироненко, Румынин, 1986; 1998).

Х.2. Базовые 3D решения для неограниченных в пространстве фильтрационных потоков

Х.2.1. Точечный источник

Необходимость получения решения миграционной задачи в полной трехмерной постановке для мгновенного (импульсного) точечного источника (рис. Х.1) предполагает задание следующего начального условия

$$C_i(x, y, z, 0) = \frac{M}{nR} \delta(x, y, z), \quad (\text{X.7})$$

здесь $\delta(x, y, z)$ – дельта-функция Дирака [L^{-3}]; M – общая масса вещества, поступившего в пористую среду в точке $x = 0, y = 0, z = 0$ в момент времени $t = 0$ [М], причем

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_i(x, y, z) nR dx dy dz. \quad (\text{X.8})$$

С точки зрения математической формулировки начального условия (X.7) считается, что источник имеет массу, но не имеет объема, однако физически величина M должна

ассоциироваться с произведением C_0V_0 , где C_0 – концентрация, а V_0 – объем мгновенно (теоретически за время $t \rightarrow 0$) инъецированного в среду раствора.

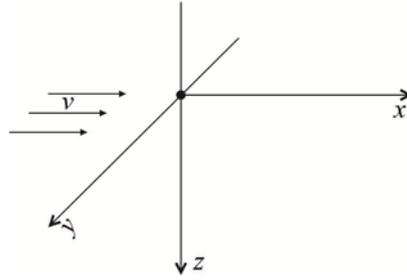


Рис. X.1. Точечный источник в неограниченном трехмерном пространстве

Одним из эффективных методов решения задач пространственной гидродисперсии является метод, основанный на преобразовании исходных уравнений типа (X.1-X.2) с помощью функций Грина (Galya, 1987; Charbeneau, 2000; Leij, van Genuchten, 2000; Leij et al., 2000; Park, Zhan, 2001) с последующим интегрированием в области x, y, z, t .

Для импульсного входного сигнала решение уравнения (X.2) можно представить в форме произведения трех одномерных функций Грина:

$$C_i(x, y, z, t) = \frac{M}{nR} G_x G_y G_z \exp(-\lambda t), \quad (\text{X.9})$$

определяемых для неограниченной среды соотношениями (при расположении источника $x=0, y=0, z=0$ – см. рис. X.1):

$$G_x(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D_x t / R}} \cdot \exp\left(-\frac{(x - ut / R)^2}{4D_x t / R}\right), \quad (\text{X.10a})$$

$$G_y(y, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D_y t / R}} \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{4D_y t / R}\right), \quad (\text{X.10б})$$

$$G_z(z, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D_z t / R}} \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{4D_z t / R}\right). \quad (\text{X.10в})$$

Эти функции записаны для случая, когда границы пласта удалены от источника на значительные расстояния (теоретически в бесконечность):

$$C_i(\infty, y, z, t) = 0, \quad C_i(x, \infty, z, t) = 0, \quad C_i(x, y, \infty) = 0. \quad (\text{X.11})$$

Таким образом получаем решение (Wexler, 1992, формула (104)):

$$C_i(x, y, z, t) = \frac{M}{8\pi n} \frac{1}{\sqrt{\pi D_x D_y D_z / R}} \frac{1}{t^{3/2}} \exp(-\lambda t) \times \exp\left(-\frac{(x - ut / R)^2}{4D_x t / R} - \frac{y^2}{4D_y t / R} - \frac{z^2}{4D_z t / R}\right). \quad (\text{X.12})$$

Максимальная концентрация определяется выражением:

$$C_{\max} = C_i(x = ut/R, 0, 0) = \frac{M}{8n\sqrt{\pi^3 D_x D_y D_z t^3 / R}} \exp(-\lambda t) . \quad (\text{X.12a})$$

Пусть масса вещества M (X.8) определяется произведением $C_0 Q dt$ (dt – элементарный промежуток времени, в течение которого в элементарный объем пласта поступает раствор, имеющий концентрацию C_0 , с расходом Q). Тогда интегрирование (X.9) по времени приводит к решению для непрерывно действующего точечного источника (Wexler, 1992, f. 105):

$$C(x, y, z, t) = \frac{q_p}{8\pi n r \sqrt{D_y D_z}} \exp\left(\frac{ux}{2D_x}\right) \times \left\{ \exp\left(\frac{r\mu}{2D_x}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{rR + \mu t}{2\sqrt{D_x R t}}\right) + \exp\left(-\frac{r\mu}{2D_x}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{rR - \mu t}{2\sqrt{D_x R t}}\right) \right\}, \quad (\text{X.13})$$

где $r = \sqrt{x^2 + \frac{D_x}{D_y} y^2 + \frac{D_x}{D_z} z^2}$, $\mu = \sqrt{u^2 + 4D_x R \lambda}$, $q_p = C_0 Q$ – интенсивность источника [МГ⁻¹].

Решение (X.13) допускает преобразование:

$$\mu \rightarrow u, \quad C \rightarrow \exp(-\lambda t) C, \quad (\text{X.14})$$

позволяющее использовать его для описания концентрационных полей, формируемых экспоненциально затухающим источником.

Решение (X.13) имеет стационарную асимптотику для неограниченно больших значений времени ($t \rightarrow \infty$) (Rumynin, 2011, f. 1.161):

$$C(x, y, z, t \rightarrow \infty) = \frac{q_p}{4\pi n r \sqrt{D_y D_z}} \exp\left(-\frac{r\mu - ux}{2D_x}\right). \quad (\text{X.15})$$

При $D_x \rightarrow 0$ формула (X.15) преобразуется к виду:

$$C = \frac{q_p}{4\pi n x \sqrt{D_y D_z}} \exp\left(-\frac{\lambda x R}{u} - \frac{y^2}{4D_y x/u} - \frac{z^2}{4D_z x/u}\right). \quad (\text{X.15a})$$

Если положить $D_y = D_z = D_T$, то получаем:

$$C = \frac{q_p}{4\pi n x D_T} \exp\left(-\frac{\lambda x R}{u} - \frac{y^2 + z^2}{4D_T x/u}\right). \quad (\text{X.15б})$$

Можно заметить, что при отсутствии распада стационарные решения не зависят от сорбционного взаимодействия (коэффициент R).

Х.2.2. Источник в форме прямоугольника, ориентированного ортогонально направлению потока

Точное решение 3D задачи конвективной дисперсии в неограниченном по мощности и простирающуюся пласте при плоском концентрационном источнике, в форме прямоугольника (со сторонами W и H) (рис. X.2):

$$C(0, y, z, t) = C_0, \text{ для } -W/2 \leq y \leq W/2 \text{ и } -H/2 \leq z \leq H/2, \quad (\text{X.16})$$

$$C(0, y, z, t) = 0, \text{ для } y > W/2 \text{ и } z > H/2, \quad (\text{X.16a})$$

может быть получено путем интегрирования уравнения (X.9) с учетом размеров источника W и H в направлениях y и z (Wexler, 1992):

$$C(x, y, z, t) = \frac{C_0 x}{8\sqrt{\pi D_x R}} \int_0^t \frac{1}{\tau^{3/2}} \exp(-\lambda\tau) \exp\left(-\frac{(x-u\tau/R)^2}{4D_x\tau/R}\right) \times \\ \times \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{y-W/2}{2\sqrt{D_y\tau/R}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{y+W/2}{2\sqrt{D_y\tau/R}}\right) \right] \times \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{z-H/2}{2\sqrt{D_z\tau/R}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{z+H/2}{2\sqrt{D_z\tau/R}}\right) \right] d\tau. \quad (\text{X.17})$$

Полагая $\tau^{3/2} \approx \tau^{1/2} \tau_m$, $\tau_m = xR/u$ приходим к приближенной зависимости (Guyonnet, Neville, 2004):

$$C(x, y, z, t) = \frac{q_a}{8n\sqrt{\pi D_x R}} \int_0^t \frac{1}{\tau^{1/2}} \exp(-\lambda\tau) \exp\left(-\frac{(x-u\tau/R)^2}{4D_x\tau/R}\right) \times \\ \times \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{y-W/2}{2\sqrt{D_y\tau/R}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{y+W/2}{2\sqrt{D_y\tau/R}}\right) \right] \times \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{z-H/2}{2\sqrt{D_z\tau/R}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{z+H/2}{2\sqrt{D_z\tau/R}}\right) \right] d\tau, \quad (\text{X.18})$$

где предполагается, что интенсивность поступления вещества на единицу площади фильтрационного потока в пределах границ прямоугольного источника ($[ML^{-2}T^{-1}]$) определяется естественным конвективным потоком, $q_a = C_0 un = C_0 v$.

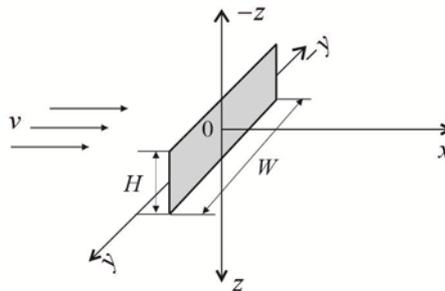


Рис. X.2. Вертикальный прямоугольный источник в неограниченном трехмерном пространстве

Для экспоненциально затухающего источника используется решение (X.17), в котором в подынтегральной функции осуществляется замена:

$$\exp(-\lambda\tau) \rightarrow \exp(-\lambda t). \quad (\text{X.19})$$

Если константа, характеризующая распад в источнике, λ_s , отличается от константы распада в пласте, λ , то в подынтегральной функции в решениях (X.17) и (X.18) появляется дополнительный экспоненциальный множитель (Paladino et al., 2017):

$$\exp[-\lambda_s(t - \tau)]. \quad (\text{X.19a})$$

Приближенное решение Доменико (так называемая аппроксимация Доменико), полученное «эвристическим» путем (Domenico, Robbins, 1985; Domenico, 1987), представляет собой произведение трех частных решений (f_ξ):

$$\bar{C}(x, y, z, t) \approx f_x(x, t) \times f_y(y, x) \times f_z(z, x); \quad (\text{X.20})$$

первое,

$$f_x(x, t) = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{ux}{2D_x}\right) \left[\exp\left(-\frac{\mu}{2D_x/x}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x - \mu t / R}{2\sqrt{D_x t / R}}\right) + \exp\left(\frac{\mu}{2D_x/x}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x + \mu t / R}{2\sqrt{D_x t / R}}\right) \right] \quad (\text{X.21a})$$

– одномерное решение нестационарной задачи массопереноса в направлении потока (Румынин, 2020, f.3.19);

второе и третье,

$$f_y(y, x) = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erfc}\left(\frac{y - W / 2}{2\sqrt{D_y x / u}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{y + W / 2}{2\sqrt{D_y x / u}}\right) \right\}, \quad (\text{X.21б})$$

$$f_z(z, x) = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erfc}\left(\frac{z - H / 2}{2\sqrt{D_z x / u}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{z + H / 2}{2\sqrt{D_z x / u}}\right) \right\}, \quad (\text{X.21в})$$

– решения «плоских» 2D стационарных задач дисперсии (в направлении координатных осей y и z) от линейных источников; здесь $\operatorname{erfc}(\xi)$ – дополнительная функция ошибок, $\mu = \sqrt{u^2 + 4D_x R \lambda}$.

Решение (X.20), объединяющее, по сути дела, одномерные решения на случай трехмерной дисперсии, не имеет строгого математического обоснования (Guyonnet, Neville, 2004; West et al., 2007). Только при весьма низких значениях продольной дисперсивности (теоретически, при $D_x \rightarrow 0$) происходит сближение точного и приближенного решений.

Расчеты по формуле (X.20) могут давать довольно существенные отклонения (до десятков процентов – в сторону занижения истинных значений концентрации) от точного решения соответствующей задачи в областях доминирования дисперсионных процессов,

т.е. на периферии ореола загрязнения. Описание концентрационного поля вблизи центральной линии ореола, где преобладает конвекция, не исключает использование приближенного решения (X.20) в практических целях.

Для экспоненциально затухающего источника используется решение (X.20), в котором функция $f_x(x, t)$ определяется как:

$$f_x(x, t) = \frac{1}{2} \exp(-\lambda t) \operatorname{erfc} \left(\frac{x - ut/R}{2\sqrt{D_x t/R}} \right). \quad (\text{X.22})$$

Стационарная асимптотика решения (X.20) ($D_x > 0$) имеет вид:

$$\bar{C}(x, y, z, \infty) = \exp \left(\frac{ux}{2D_x} \right) \exp \left(-\frac{\mu}{2D_x/x} \right) f_y(y, x) f_z(z, x). \quad (\text{X.23})$$

При $D_x \rightarrow 0$ приходим к зависимости:

$$\bar{C}(x, y, z, \infty) = \exp \left(-\frac{Rx\lambda}{u} \right) f_y(y, x) f_z(z, x). \quad (\text{X.23a})$$

При $\lambda_s \neq \lambda$ в качестве продольной компоненты $f_x(x, t)$ в решении Доменико (X.20) (Paladino et al., 2017) предлагают использовать одномерное решение Van Genuchten and Alves (1982):

$$f_x(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ \exp \left(\frac{(u - \mu)x}{2D_x} - \lambda_s t \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{xR - \mu t}{2\sqrt{D_x R t}} \right) + \exp \left(\frac{(u + \mu)x}{2D_x} - \lambda_s t \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{xR + \mu t}{2\sqrt{D_x R t}} \right) \right\}, \quad (\text{X.24})$$

где $\mu = \sqrt{u^2 + 4D_x \lambda R - 4D_x \lambda_s R}$.

Для импульсного источника из (X.17):

$$C_i(x, y, z, t) = \frac{M_a x}{8n u t \sqrt{\pi D_x t/R}} \exp(-\lambda t) \exp \left(-\frac{(x - ut/R)^2}{4D_x t/R} \right) \times \\ \times \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{y - W/2}{2\sqrt{D_y t/R}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{y + W/2}{2\sqrt{D_y t/R}} \right) \right] \times \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{z - H/2}{2\sqrt{D_z t/R}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{z + H/2}{2\sqrt{D_z t/R}} \right) \right]. \quad (\text{X.25})$$

Для приближенного решения (X.18) имеем:

$$C_i(x, y, z, t) \approx \frac{M_a}{8n \sqrt{\pi D_x R t}} \exp(-\lambda t) \exp \left(-\frac{(x - ut/R)^2}{4D_x t/R} \right) \times \\ \times \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{y - W/2}{2\sqrt{D_y t/R}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{y + W/2}{2\sqrt{D_y t/R}} \right) \right] \times \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{z - H/2}{2\sqrt{D_z t/R}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{z + H/2}{2\sqrt{D_z t/R}} \right) \right], \quad (\text{X.26})$$

где M_a – интенсивность импульса на единицу площади [ML^{-2}].

Дополнительно в программном комплексе ANSDIMAT C предусмотрена возможность задания источника в качестве «поточковой» функции. Рассмотрен также случай расположения вертикального плоского источника по потоку. Собственно аналитические решения представлены в справочной системе программного комплекса.

Х.2.3. Источник прямоугольной формы в горизонтальной плоскости

Для такой ориентации плоского источника (рис. Х.3):

$$C(0, y, z, t) = C_0, \text{ для } -W/2 \leq y \leq W/2 \text{ и } -L/2 \leq x \leq L/2, \quad (\text{X.27})$$

$$C(0, y, z, t) = 0, \text{ для } y > W/2 \text{ и } z > L/2, \quad (\text{X.27a})$$

получаем решение 3D задачи (Leij et al., 2000):

$$C(x, y, z, t) = \frac{C_0 z}{8\sqrt{\pi D_z R}} \int_0^t \frac{1}{\tau^{3/2}} \exp(-\lambda\tau) \exp\left(-\frac{Rz^2}{4D_z\tau}\right) \times \quad (\text{X.28})$$

$$\times \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x-L-u\tau/R}{2\sqrt{D_x\tau/R}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{x-u\tau/R}{2\sqrt{D_x\tau/R}}\right) \right] \times$$

$$\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{y+W/2}{2\sqrt{D_y\tau/R}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{y-W/2}{2\sqrt{D_y\tau/R}}\right) \right] d\tau.$$

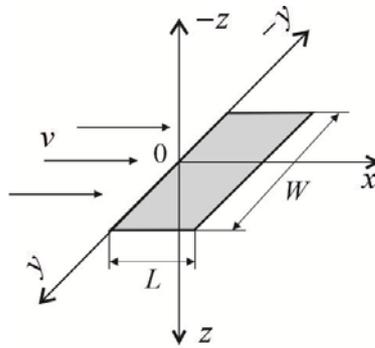


Рис. Х.3. Прямоугольный источник в горизонтальной плоскости неограниченного трехмерного пространства

Полагая $\tau^{3/2} \approx \tau^{1/2} \tau_m$, $\tau_m = Rz/w$, где w – вертикальная компонента действительной скорости фильтрации в пределах источника, приходим к следующему приближенному решению:

$$C(x, y, z, t) = \frac{q_a}{8n\sqrt{\pi D_z R}} \int_0^t \frac{1}{\tau^{1/2}} \exp(-\lambda\tau) \exp\left(-\frac{Rz^2}{4D_z\tau}\right) \times \quad (\text{X.29})$$

$$\times \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{x-L-u\tau/R}{2\sqrt{D_x\tau/R}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{x-u\tau/R}{2\sqrt{D_x\tau/R}} \right) \right] \times \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{y-W/2}{2\sqrt{D_y\tau/R}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{y+W/2}{2\sqrt{D_y\tau/R}} \right) \right] d\tau.$$

где $q_a = C_0 w n$ – интенсивность поступления вещества на единицу площади концентрационного источника ($[ML^{-2}T^{-1}]$).

Для экспоненциально затухающего источника используется решение (X.28), в котором в подынтегральной функции осуществляется замена:

$$\exp(-\lambda\tau) \rightarrow \exp(-\lambda t). \quad (X.30)$$

Если константа, характеризующая распад в источнике, λ_s , отличается от λ , то в подынтегральной функции в решениях (X.28) и (X.29) появляется дополнительный экспоненциальный множитель:

$$\exp[-\lambda_s(t-\tau)]. \quad (X.30a)$$

Решение (X.29) позволяет получить приближенное решение для импульса:

$$C_i(x, y, z, t) = \frac{M_a}{8n\sqrt{\pi D_z R t}} \exp(-\lambda\tau) \exp\left(-\frac{Rz^2}{4D_z\tau}\right) \times \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{x-L-u\tau/R}{2\sqrt{D_x\tau/R}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{x-u\tau/R}{2\sqrt{D_x\tau/R}} \right) \right] \times \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{y-W/2}{2\sqrt{D_y\tau/R}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{y+W/2}{2\sqrt{D_y\tau/R}} \right) \right]. \quad (X.31)$$

M_a – удельная интенсивность источника $[ML^{-2}]$.

При наличии площадной инфильтрации процесс 3D конвективной дисперсии описывается уравнением (Leij et al., 2000):

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{u}{R} \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{w}{R} \frac{\partial C}{\partial z} - \frac{D_x}{R} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{D_y}{R} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \frac{D_z}{R} \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \lambda C = 0, \quad (X.32)$$

где w – вертикальная компонента действительной (поровой) скорости фильтрации, связанная с величиной инфильтрации, ε , соотношением $\varepsilon = w \times n$.

Решение задачи при условиях (X.27) имеет вид (Leij et al., 2000):

$$C(x, y, z, t) = \frac{q_a}{4nR} \int_0^t \exp(-\lambda\tau) \times \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{x-L-u\tau/R}{2\sqrt{D_x\tau/R}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{x-u\tau/R}{2\sqrt{D_x\tau/R}} \right) \right] \times \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{y-W/2}{2\sqrt{D_y\tau/R}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{y+W/2}{2\sqrt{D_y\tau/R}} \right) \right] \times \left[\sqrt{\frac{R}{\pi D_z \tau}} \exp\left(-\frac{(Rz-w\tau)^2}{4D_z R \tau}\right) - \frac{w}{2D_z} \exp\left(\frac{wz}{2D_z}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{Rz+w\tau}{\sqrt{4D_z R \tau}}\right) \right] d\tau, \quad (X.33)$$

$$q_a = w \times n \times C_0 = \varepsilon \times C_0.$$

Для импульса имеем:

$$C(x, y, z, t) = \frac{M_a}{4nR} \exp(-\lambda t) \times \quad (X.34)$$

$$\times \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x-L-u\tau/R}{2\sqrt{D_x t/R}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{x-u\tau/R}{2\sqrt{D_x t/R}}\right) \right] \times \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{y+W/2}{2\sqrt{D_y t/R}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{y-W/2}{2\sqrt{D_y t/R}}\right) \right] \times$$

$$\times \left[\sqrt{\frac{R}{\pi D_z t}} \exp\left(-\frac{(Rz-wt)^2}{4D_z R t}\right) - \frac{w}{2D_z} \exp\left(\frac{wz}{2D_z}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{Rz+wt}{\sqrt{4D_z R t}}\right) \right],$$

где M_a – интенсивность импульса $[ML^{-2}]$.

Х.2.4. Объемный (3D) источник в неограниченном пласте

Решение 3D уравнения (X.2) для частного случая $\lambda = 0$ может быть получено посредством его преобразования в систему подвижных координат (Batu, 2006):

$$\eta = x - ut/R, \quad \tau = t, \quad (X.35)$$

что приводит к уравнению диффузионного типа, которое в безразмерных координатах имеет вид:

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 C}{\partial \bar{\eta}^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial \bar{z}^2}, \quad (X.36)$$

где

$$\bar{\eta} = \left(\frac{R}{D_x}\right)^{1/2} (x - ut/R), \quad \bar{y} = \left(\frac{R}{D_y}\right)^{1/2} y, \quad \bar{z} = \left(\frac{R}{D_z}\right)^{1/2} z. \quad (X.366)$$

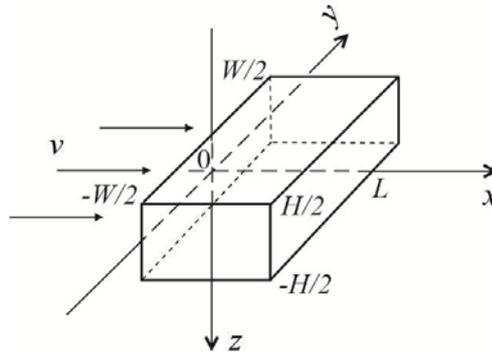


Рис. X.4. Объемный источник в неограниченной среде.

Краевые условия, отражающие формирование конвективно-дисперсионного потока при поступлении вещества в неограниченный пласт от импульсного концентрационного

источника $C_0 = M/(nRLWH)$ в форме параллелепипеда (положение его центра массы совпадает с началом координатных осей $x = y = z = 0$, см.рис. X.4), следует записать в виде:

$$C(\bar{\eta}, \bar{y}, \bar{z}, \tau = 0) = C_0 \text{ для } 0 \leq \bar{\eta} \leq \bar{\eta}_0, -\frac{\bar{y}_0}{2} \leq \bar{y} \leq \frac{\bar{y}_0}{2}, -\frac{\bar{z}_0}{2} \leq \bar{z} \leq \frac{\bar{z}_0}{2}; \quad (\text{X.37a})$$

$$C(\bar{\eta}, \bar{y}, \bar{z}, \tau = 0) = 0 \text{ для } 0 > \bar{\eta} > \bar{\eta}_0, |\bar{y}| > \frac{\bar{y}_0}{2}, |\bar{z}| > \frac{\bar{z}_0}{2} \quad (\text{X.37б})$$

$$\text{(причем } \bar{\eta}_0 = \left(\frac{R}{D_x}\right)^{1/2} L, \bar{y}_0 = \left(\frac{R}{D_y}\right)^{1/2} W, \bar{z}_0 = \left(\frac{R}{D_z}\right)^{1/2} H); \quad (\text{X.37в})$$

$$C(\bar{\eta}, \bar{y}, \bar{z}, \tau) = 0, (\bar{\eta}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2)^{1/2} \rightarrow \infty. \quad (\text{X.37г})$$

Решение уравнения диффузионного типа (X.36) при краевых условиях (X.37) известно (Карслоу, Егер, 1964, с. 62; Вату, 2006, р. 211):

$$C_i(\bar{\eta}, \bar{y}, \bar{z}, \tau) = \frac{C_0}{8} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\bar{\eta}_0 - \bar{\eta}}{2\sqrt{\tau}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{\bar{\eta}}{2\sqrt{\tau}}\right) \right] \times \\ \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\bar{y}_0/2 - \bar{y}}{2\sqrt{\tau}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{\bar{y}_0/2 + \bar{y}}{2\sqrt{\tau}}\right) \right] \times \\ \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\bar{z}_0/2 - \bar{z}}{2\sqrt{\tau}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{\bar{z}_0/2 + \bar{z}}{2\sqrt{\tau}}\right) \right]. \quad (\text{X.38})$$

Переходя к размерным переменным, получаем:

$$C_i(x, y, z, t) = \frac{M}{8nRLWH} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x - ut/R - L}{2\sqrt{D_x t/R}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{x - ut/R}{2\sqrt{D_x t/R}}\right) \right] \times \\ \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{y - W/2}{2\sqrt{D_y t/R}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{y + W/2}{2\sqrt{D_y t/R}}\right) \right] \times \\ \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{z - H/2}{2\sqrt{D_z t/R}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{z + H/2}{2\sqrt{D_z t/R}}\right) \right]. \quad (\text{X.39})$$

Для нестабильного компонента (импульс):

$$C_i(x, y, z, t) = \frac{M}{8nRLWH} \exp(-\lambda t) \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x - L - ut/R}{2\sqrt{D_x t/R}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{x - ut/R}{2\sqrt{D_x t/R}}\right) \right] \times \\ \times \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{y - W/2}{2\sqrt{D_y t/R}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{y + W/2}{2\sqrt{D_y t/R}}\right) \right] \times \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{z - H/2}{2\sqrt{D_z t/R}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{z + H/2}{2\sqrt{D_z t/R}}\right) \right]. \quad (\text{X.40})$$

Интегрирование (X.40) дает решение для постоянно действующего источника с постоянной интенсивностью q_v ($[ML^{-3}T^{-1}]$):

$$C = \frac{q_v}{8nR} \int_0^t \exp(-\lambda\tau) \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x-L-u\tau/R}{2\sqrt{D_x\tau/R}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{x-u\tau/R}{2\sqrt{D_x\tau/R}}\right) \right] \times \\ \times \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{y-W/2}{2\sqrt{D_y\tau/R}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{y+W/2}{2\sqrt{D_y\tau/R}}\right) \right] \times \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{z-H/2}{2\sqrt{D_z\tau/R}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{z+H/2}{2\sqrt{D_z\tau/R}}\right) \right] d\tau. \quad (\text{X.41})$$

В случае экспоненциально затухающего источника

$$C = \frac{q_v}{8nR} \exp(-\lambda t) \int_0^t \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x-L-u\tau/R}{2\sqrt{D_x\tau/R}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{x-u\tau/R}{2\sqrt{D_x\tau/R}}\right) \right] \times \\ \times \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{y-W/2}{2\sqrt{D_y\tau/R}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{y+W/2}{2\sqrt{D_y\tau/R}}\right) \right] \times \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{z-H/2}{2\sqrt{D_z\tau/R}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{z+H/2}{2\sqrt{D_z\tau/R}}\right) \right] d\tau. \quad (\text{X.42})$$

Случай экспоненциального затухания в источнике, характеризуемого константой $\lambda_s \neq \lambda$:

$$C = \frac{q_v}{8nR} \int_0^t \exp[-\lambda(t-\tau) - \lambda_s\tau] \times \\ \times \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x-L-u\tau/R}{2\sqrt{D_x\tau/R}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{x-u\tau/R}{2\sqrt{D_x\tau/R}}\right) \right] \times \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{y-W/2}{2\sqrt{D_y\tau/R}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{y+W/2}{2\sqrt{D_y\tau/R}}\right) \right] \times \\ \times \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{z-H/2}{2\sqrt{D_z\tau}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{z+H/2}{2\sqrt{D_z\tau}}\right) \right] d\tau. \quad (\text{X.43})$$

Решения (X.39)-(X.43) справедливы при достаточно высоких значениях характерного параметра $Pe = ux/D_x$. В противном случае, возникают погрешности расчета, обусловленные решением задачи в подвижной системе координат.

Приближенное решение (Доменико) для объемного источника с постоянной концентрацией имеет вид (Sangani, Srinivasan, 2021):

$$C(x, y, z, t) = \frac{C_0}{8} \frac{x-L}{\sqrt{\pi D_x/R}} \int_0^t \exp\left(\frac{x-L}{2D_x/u} - \frac{u^2\tau}{4D_x R} - \frac{(x-L)^2}{4D_x\tau/R} - \lambda\tau\right) \times \\ \times \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{y-W/2}{2\sqrt{D_y\tau/R}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{y+W/2}{2\sqrt{D_y\tau/R}}\right) \right] \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{z-H/2}{2\sqrt{D_z\tau/R}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{z+H/2}{2\sqrt{D_z\tau/R}}\right) \right] \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^3}}. \quad (\text{X.44})$$

При экспоненциальном падении концентрации в источнике

$$C(x, y, z, t) = \frac{C_0}{8} \frac{x-L}{\sqrt{\pi D_x/R}} \exp(-\lambda t) \int_0^t \exp\left(\frac{x-L}{2D_x/u} - \frac{u^2\tau}{4D_x R} - \frac{(x-L)^2}{4D_x\tau/R}\right) \times \\ \times \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{y-W/2}{2\sqrt{D_y\tau/R}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{y+W/2}{2\sqrt{D_y\tau/R}}\right) \right] \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{z-H/2}{2\sqrt{D_z\tau/R}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{z+H/2}{2\sqrt{D_z\tau/R}}\right) \right] \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^3}}. \quad (\text{X.45})$$

При $\lambda_s \neq \lambda$:

$$C(x, y, z, t) = \frac{C_0}{8} \frac{x-L}{\sqrt{\pi D_x / R}} \exp(-\lambda_s t) \int_0^t \exp\left(\frac{x-L}{2D_x/u} - \frac{u^2 \tau}{4D_x R} - \frac{(x-L)^2}{4D_x \tau / R} - \lambda_s \tau - \lambda \tau\right) \times \\ \times \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{y-W/2}{2\sqrt{D_y \tau / R}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{y+W/2}{2\sqrt{D_y \tau / R}}\right) \right] \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{z-H/2}{2\sqrt{D_z \tau / R}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{z+H/2}{2\sqrt{D_z \tau / R}}\right) \right] \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^3}}. \quad (\text{X.46})$$

Х.3. Частные решения 2D задач конвективной дисперсии в плановом потоке (x-y)

Уравнение, описывающее миграцию в плановом (одномерном) фильтрационном потоке, имеет вид:

$$R \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} - D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \lambda R = 0. \quad (\text{X.47})$$

Считается, что источник загрязнения примыкает к кровле и подошве пласта (рис. X.5а, рис. X.6а). В плане (плоскости x-y) он может иметь вид точки (рис. X.5б) или ограниченной линии (рис. X.6б).

Х.3.1. Точечный в плане источник

Для импульсного концентрационного источника (рис. X.5) начальное условие имеет вид:

$$C_i(x, y, 0) = \frac{M}{mnR} \delta(x, y), \quad (\text{X.48})$$

где условие для баланса массы вещества можно представить в виде:

$$M = C_0 V_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_i(x, y) mnR dx dy \quad (\text{X.49})$$

(m – мощность пласта [L], $\delta(x, y)$ [L⁻²]).

Тогда интегрирование:

$$C(x, y, t) = \iint C(\xi, \eta, 0) G_x G_y d\xi d\eta, \quad (\text{X.50})$$

где $C(\xi, \eta, 0)$ – начальное условие, G_x, G_y – одномерные функции Грина, определяемые для неограниченной среды соотношениями:

$$G_x(x, t, \xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D_x t}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\xi-ut)^2}{4D_x t}\right), \quad (\text{X.51a})$$

$$G_y(y, t, \eta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D_y t}} \cdot \exp\left(-\frac{(y - \eta)^2}{4D_y t}\right), \quad (\text{X.516})$$

приводит к фундаментальному решению задачи для точечного концентрационного источника, включающему в явном виде функции Грина:

$$C_i(x, y, t) = \frac{M}{mnR} G_x(x, t) G_y(y, t) \exp(-\lambda t), \quad (\text{X.52})$$

где функции Грина определяются согласно (X.10а) и (X.10б).

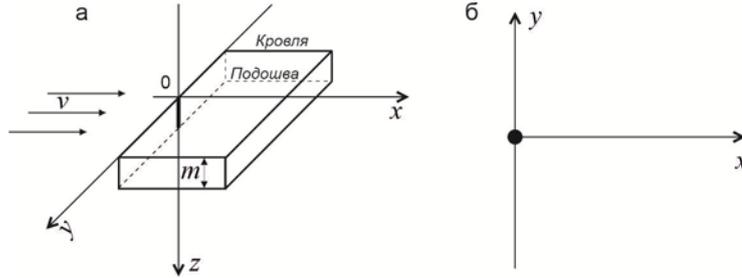


Рис. X.4. Схематичное представление точечного источника в рамках концепции 2D плановой модели: а – положение источника в пласте, б – вид в плане (x–y)

По аналогии с (X.12) для импульсного источника в плановом потоке, имеем следующее решение двумерной задачи:

$$C_i(x, y, t) = \frac{M}{4\pi mn \sqrt{D_x D_y} t} \exp(-\lambda t) \exp\left(-\frac{(x - ut/R)^2}{4D_x t/R}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{4D_y t/R}\right), \quad (\text{X.53})$$

или, в преобразованном виде,

$$C_i(x, y, t) = \frac{M}{4\pi mn \sqrt{D_x D_y} t} \exp\left(\frac{ux}{2D_x}\right) \exp\left[-\frac{Rr^2}{4D_x t} - \frac{\mu^2 t}{4D_x R}\right], \quad (\text{X.54})$$

$$\text{где } r = \sqrt{x^2 + \frac{D_x}{D_y} y^2}, \quad \mu = \sqrt{u^2 + 4D_x R \lambda}. \quad (\text{X.55})$$

Для постоянно действующего источника интегрирование (X.53) дает (Wexler, 1992, f. (76)):

$$\begin{aligned} C(x, y, t) &= \frac{1}{m} \frac{dM}{dt} \int_0^t C_i(x, y, t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{q_i}{4\pi n \sqrt{D_x D_y}} \exp\left(\frac{ux}{2D_x}\right) \int_0^t \exp(-\lambda \tau) \exp\left[-\frac{Rr^2}{4D_x \tau} - \frac{u^2 \tau}{4D_x R}\right] \frac{d\tau}{\tau}, \end{aligned} \quad (\text{X.55})$$

где $r = r(x^2, y^2)$ определяется согласно (X.54a); $q_l = \frac{1}{m} \frac{dM}{dt}$ – удельная (на единицу мощности пласта) интенсивность концентрационного источника $[ML^{-1}T^{-1}]$. Или, в преобразованном виде,

$$C(x, y, t) = \frac{q_l}{4\pi n \sqrt{D_x D_y}} \exp\left(\frac{ux}{2D_x}\right) \int_0^t \exp\left[-\frac{\mu^2 \tau}{4D_x R} - \frac{Rr^2}{4D_x \tau}\right] \frac{d\tau}{\tau}. \quad (X.56)$$

Интеграл в решении (X.55) формально идентичен «функции перетекания» в фильтрационной задаче со скважиной (Hunt, 1978). Поэтому решение (X.55) для быть представлено в виде (Wilson and Miller 1978):

$$C(x, y, t) = \frac{q_l}{4\pi n \sqrt{D_x D_y}} \exp\left(\frac{ux}{2D_x}\right) W(U, B), \quad (X.57)$$

$$W(U, B) = \int_U^\infty \frac{1}{\xi} \exp\left(-\xi - \frac{B^2}{4\xi}\right) d\xi, \quad (X.57a)$$

где $r = r(x^2, y^2)$ и μ определяется согласно (X.55); $U = \frac{Rr^2}{4D_x t}$, $B = \frac{r\mu}{2D_x}$.

Функция $W(U, B)$ при больших значениях B , представляющих основной практический интерес, имеет следующее асимптотическое представление (Allen, 1985):

$$W(U, B) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2B}} \exp(-B) \operatorname{erfc}\left(\frac{2U - B}{2\sqrt{U}}\right). \quad (X.58)$$

Достаточно высокая точность расчетов достигается при $B > 5$ и выполнении дополнительного условия $U < B$ ($r < 2ut$).

Стационарная асимптотика решения (X.56) имеет вид (Wexler, f. 77):

$$C(x, y) = \frac{q_l}{2\pi n \sqrt{D_x D_y}} \exp\left(\frac{ux}{2D_x}\right) K_0\left(\frac{r\mu}{2D_x}\right), \quad (X.59)$$

где K_0 – модифицированная функция Бесселя второго рода первого порядка. Функция $K_0(z)$ в решении (X.59) при $z > 5$ аппроксимируется зависимостью (Hantush, 1964):

$$K_0(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \left(1 - \frac{1}{8z}\right) e^{-z} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}, \quad (X.59a)$$

что позволяет преобразовать решение (X.57) к экспоненциальному виду

$$C(x, y, t \rightarrow \infty) = \frac{q_l}{2n \sqrt{\pi \mu r D_y}} \exp\left(-\frac{\mu r - ux}{2D_x}\right), \quad (X.60)$$

подобному (X.15), где $r = \sqrt{x^2 + \frac{D_x}{D_y} y^2}$, $\mu = \sqrt{u^2 + 4D_x R \lambda}$.

При существенном развитии поперечного рассеяния вещества ролью продольной гидродисперсии можно пренебречь. Полагая $D_x \rightarrow 0$, получаем:

$$C = \frac{q_l}{2n\sqrt{\pi D_y x u}} \exp\left(-\frac{\lambda x R}{u} - \frac{y^2}{4D_y x/u}\right). \quad (\text{X.61})$$

Для экспоненциально затухающего источника используется решение (X.56), в котором осуществляется замена:

$$\exp\left(\frac{ux}{2D_x}\right) \rightarrow \exp\left(\frac{ux}{2D_x} - \lambda t\right), \quad \mu \rightarrow u. \quad (\text{X.62})$$

Если константа, характеризующая распад в источнике, λ_s , отличается от λ , то в решении (X.56) осуществляется замена:

$$\exp\left(\frac{ux}{2D_x}\right) \rightarrow \exp\left(\frac{ux}{2D_x} - \lambda_s t\right), \quad \mu = \sqrt{u^2 + 4D_x R(\lambda - \lambda_s)}. \quad (\text{X.62a})$$

Х.3.2. Линейный в плане источник

Для импульсного входного сигнала, формируемого плоским (в сечении $y-z$) источником (рис. X.6), решение задачи можно представить в виде проиведения двух одномерных функций:

$$C_i(x, y, t) = \frac{M}{Rmn} G_x(x, t) Y_0(y, t) \exp(-\lambda t), \quad (\text{X.63})$$

$$G_x(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D_x t/R}} \exp\left[-\frac{(x - ut/R)^2}{4D_x t/R}\right], \quad (\text{X.63a})$$

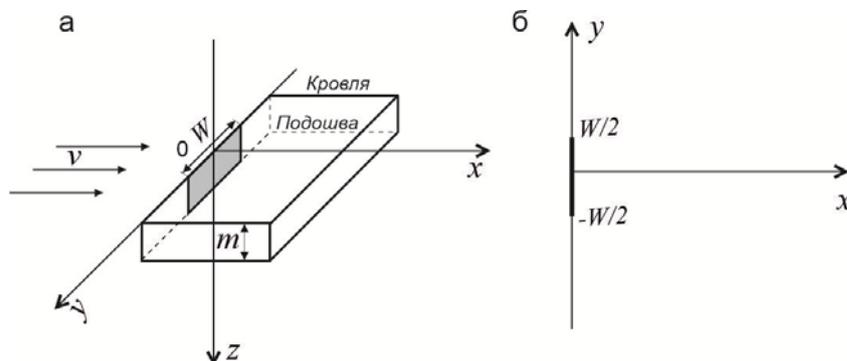


Рис. X.6. Схематичное представление линейного источника в 2D плановой задаче: а – 3D вид, б – вид сверху

$$Y_0(y, t) = \frac{1}{2W} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{y - W/2}{2\sqrt{D_y t/R}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{y + W/2}{2\sqrt{D_y t/R}} \right) \right]; \quad (\text{X.63б})$$

здесь $W/2$ – половина ширины источника.

Для постоянно действующего источника граничные условия принимают вид:

$$C(x=0, y, t) = C_0, \text{ для } -W/2 \leq y \leq W/2, \quad (\text{X.64a})$$

$$C(x=0, y, t) = 0, \text{ для } y > W/2 \text{ и } z < -W/2, \quad (\text{X.64б})$$

$$\frac{\partial C(x, y = \pm\infty, t)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial C(x = \infty, y, t)}{\partial x} = 0. \quad (\text{X.64в})$$

Интегрирование (X.63) дает (Wexler, 1992, f. 91a):

$$C(x, y, t) = \frac{C_0 x}{4\sqrt{\pi D_x R}} \exp\left(\frac{ux}{2D_x}\right) \int_0^t \frac{1}{\tau^{3/2}} \exp\left[-\frac{\mu^2 \tau}{4D_x R} - \frac{Rx^2}{4D_x \tau}\right] \times \\ \times \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{y - W/2}{2\sqrt{D_y t/R}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{y + W/2}{2\sqrt{D_y t/R}} \right) \right] d\tau, \quad \mu = \sqrt{u^2 + 4D_x R \lambda}. \quad (\text{X.65})$$

Полагая $\tau^{3/2} \approx \tau^{1/2} \tau_m$, $\tau_m = xR/u$ приходим к приближенной зависимости:

$$C(x, y, t) = \frac{q_a}{4n\sqrt{\pi D_x R}} \exp\left(\frac{ux}{2D_x}\right) \int_0^t \frac{1}{\tau^{1/2}} \exp\left[-\frac{\mu^2 \tau}{4D_x R} - \frac{Rx^2}{4D_x \tau}\right] \times \\ \times \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{y - Y/2}{2\sqrt{D_y t/R}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{y + Y/2}{2\sqrt{D_y t/R}} \right) \right] d\tau, \quad (\text{X.65a})$$

где $q_a = C_0 u n = C_0 v$ – интенсивность поступления вещества на единицу площади фильтрационного потока в пределах границ прямоугольного источника ($[\text{ML}^{-2}\text{T}^{-1}]$).

Для экспоненциально затухающего источника используется решение (X.65), в котором осуществляется замена:

$$\exp\left(\frac{ux}{2D_x}\right) \rightarrow \exp\left(\frac{ux}{2D_x} - \lambda t\right), \quad \mu \rightarrow u. \quad (\text{X.66a})$$

Если константа, характеризующая распад в источнике, λ_s , отличается от λ , то в решении (X.65) осуществляется замена:

$$\exp\left(\frac{ux}{2D_x}\right) \rightarrow \exp\left(\frac{ux}{2D_x} - \lambda_s t\right), \quad \mu = \sqrt{u^2 + 4D_x R(\lambda - \lambda_s)}. \quad (\text{X.66б})$$

Решение Доминико (без распада в источнике):

$$\bar{C}(x, y, t) \approx f_x(x, t) \times f_y(y, x); \quad (\text{X.67})$$

где

$$f_x(x, t) = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{ux}{2D_x}\right) \exp\left(-\frac{\mu}{2D_x/x}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x - \mu t / R}{2\sqrt{D_x t / R}}\right), \quad (\text{X.67a})$$

$$f_y(y, x) = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erfc}\left(\frac{y - W / 2}{2\sqrt{D_y x / u}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{y + W / 2}{2\sqrt{D_y x / u}}\right) \right\}. \quad (\text{X.67б})$$

Распад в источнике – по аналогии с выше сказанным.

Приближенное решение стационарной задачи имеет вид:

$$C = \frac{C_0}{2} \exp\left(\frac{ux}{2D_x}\right) \exp\left(-\frac{\mu}{2D_x/x}\right) \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{y - W / 2}{2\sqrt{D_y x / u}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{y + W / 2}{2\sqrt{D_y x / u}}\right) \right], \quad (\text{X.68})$$

где $\mu = \sqrt{u^2 + 4D_x R \lambda}$.

При $D_x \rightarrow 0$ формула (X.68) преобразуется к виду:

$$C = \frac{C_0}{2} \exp\left(-\frac{\lambda x R}{u}\right) \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{y - W / 2}{2\sqrt{D_y x / u}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{y + W / 2}{2\sqrt{D_y x / u}}\right) \right]. \quad (\text{X.69})$$

Асимптотическое решение (X.68) при выполнении приближенного условия $\frac{x D_y}{W^2 u} \gg 0.1$ можно представить в форме:

$$C = \frac{C_0 W}{2\sqrt{\pi D_y x / u}} \exp\left(-\frac{\lambda x R}{u} - \frac{y^2}{4D_y x / u}\right), \quad (\text{X.70})$$

подобной расчетной зависимости (X.61) для точечного источника интенсивностью $q_l = C_0 v W$.

Решение (X.65) допускает расширение на случай ограниченного (в направлении y) в плане пласта (Wexler, 1992, f. 85).

Х.3.3. Объемный источник с прямоугольной проекцией в плоскости $y-x$

Положение источника (рис. X.7) определяется: $-L/2 \leq x \leq L/2$, $-W/2 \leq y \leq W/2$ (через точку $x = 0$, $y = 0$ проходит ось симметрии).

Решение для импульсного источника имеет вид (Galva, 1987, f. 6):

$$C_i(x, y, t) = \frac{M}{Rmn} X_0(x, t) Y_0(y, t) T(t), \quad (\text{X.71})$$

где одномерные функции Грина определяются согласно формулам:

$$X_0 = \frac{1}{2L} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x - L - ut / R}{2\sqrt{D_x t / R}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{x - ut / R}{2\sqrt{D_x t / R}}\right) \right], \quad (\text{X.71a})$$

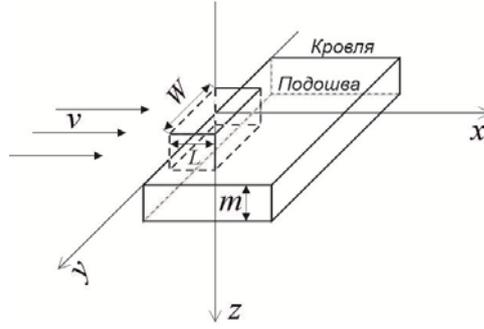


Рис. X.7. Объемный источник в плановом потоке

$$Y_0 = \frac{1}{2W} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{y-W/2}{2\sqrt{D_y t/R}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{y+W/2}{2\sqrt{D_y t/R}} \right) \right]; \quad (\text{X.716})$$

$T(t) = \exp(-\lambda t)$ – временная функция, определяющая распад вещества; L , W – линейные размеры источника – см. рис. X.7. В результате:

$$C_i(x, y, t) = \frac{M}{4RmnLW} \exp(-\lambda t) \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{x-L-ut/R}{2\sqrt{D_x t/R}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{x-ut/R}{2\sqrt{D_x t/R}} \right) \right] \times \\ \times \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{y-W/2}{2\sqrt{D_y t/R}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{y+W/2}{2\sqrt{D_y t/R}} \right) \right]. \quad (\text{X.72})$$

Начальная масса вещества в пласте $M = C_0 n V_0 = C_0 RmnLW$, где C_0 – концентрация, равномерно распределенная в объеме V_0 .

При больших x , y , t решение задачи стремится к ранее полученным решениям для точечного (X.52) или плоского (X.63) источников.

Пусть $M = C_0 Q dt$, тогда интегрирование (X.63) позволяет получить соответствующие решения для постоянно действующего концентрационного источника (Galva, 1987, f. 14):

$$C(x, y, t) = \frac{q_v}{Rmn} \int_0^t X_0(x, \tau) Y_0(y, \tau) T(\tau) d\tau, \quad (\text{X.73})$$

где $q_v = C_0 Q$ – интенсивность источника [MT^{-1}]. Подставив в (X.73) выражения для функции Грина из (X.71), получаем решение:

$$C(x, y, t) = \frac{q_v}{4LWRmn} \int_0^t \exp(-\lambda \tau) \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{x-L-u\tau/R}{2\sqrt{D_x \tau/R}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{x-u\tau/R}{2\sqrt{D_x \tau/R}} \right) \right] \times \\ \times \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{y-W/2}{2\sqrt{D_y \tau/R}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{y+W/2}{2\sqrt{D_y \tau/R}} \right) \right] d\tau. \quad (\text{X.74})$$

В случае экспоненциально затухающего источника:

$$C(x, y, t) = \frac{q_v}{4LWRmn} \exp(-\lambda t) \int_0^t \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x-L-u\tau/R}{2\sqrt{D_x\tau/R}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{x-u\tau/R}{2\sqrt{D_x\tau/R}}\right) \right] \times \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{y-W/2}{2\sqrt{D_y\tau/R}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{y+W/2}{2\sqrt{D_y\tau/R}}\right) \right] d\tau. \quad (\text{X.75})$$

Если константа, характеризующая распад в источнике, λ_s , отличается от λ , то экспоненциальный член под интегралом (X.74) принимает вид:

$$\exp[-\lambda_s(t-\tau) - \lambda\tau]. \quad (\text{X.75a})$$

Х.4. Частные решения профильных 2D (x–z) задач конвективной дисперсии

Уравнение, описывающее миграцию в профильном (одномерном) фильтрационном потоке, имеет вид

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{u}{R} \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{D_x}{R} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{D_z}{R} \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \lambda C = 0. \quad (\text{X.76})$$

Х.4.1. Линейный источник бесконечной протяженности

Концентрационное поле от линейного постоянно действующего источника, расположенного на поверхности потока и имеющего бесконечную протяженность (в профиле имеет точечное представление – рис. X.8а), описывается решением:

$$C(x, z, t) = \frac{q_l R}{4\pi n \sqrt{D_x D_z}} \exp\left[\frac{ux}{2D_x}\right] W(U, B), \quad (\text{X.77})$$

где $U = \frac{r^2}{4D_x t/R}$, $B = \frac{r\mu}{2D_x}$, $r^2 = x^2 + \frac{D_x}{D_z} z^2$, $\mu = \sqrt{u^2 + 4D_x R\lambda}$; функция $W(U, B)$

определяется согласно (X.57а), q_l – удельная интенсивность источника (масса на единицу длины) $[\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}]$.

Миграция в ограниченном по мощности пласте от источников рассматривалась в статье (Park, Zhan, 2001), в которой решалось 3D уравнение:

$$Rn \frac{\partial C}{\partial t} + v \frac{\partial C}{\partial x} - D_{ex} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - D_{ey} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - D_{ez} \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \lambda Rn C = Q_v, \quad (\text{X.78})$$

или

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{u}{R} \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{D_x}{R} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{D_y}{R} \frac{\partial C}{\partial y^2} - \frac{D_z}{R} \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \lambda C = \frac{Q_v}{Rn}, \quad (\text{X.79})$$

где $D_l = D_{el} / n$; Q_v – интенсивность источника, приведенная к единичному объему пласта.

В дальнейшем, следуя (Park, Zhan, 2001), будет использовано соотношение:

$$q_v = \frac{Q_v}{Rn}. \quad (\text{X.80})$$

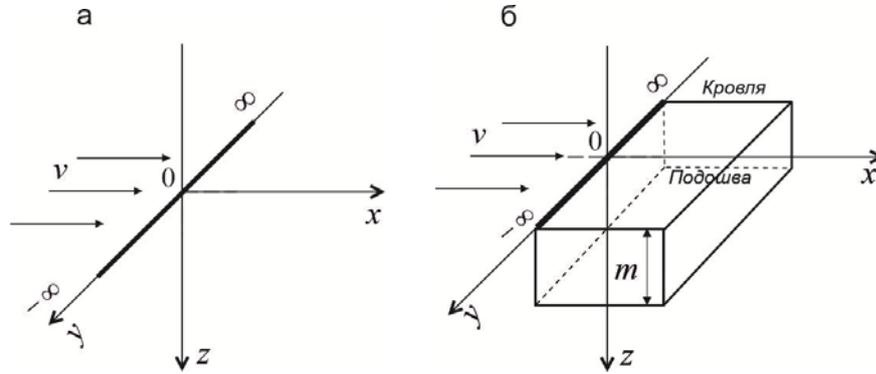


Рис. X.8. Бесконечный линейный источник в плоскости x - y , $z = 0$: а – неограниченный пласт, б – ограниченный по мощности пласт.

Для рассмотренного выше бесконечного линейного источника в ограниченном пласте мощностью m (рис. X. 8б; Park, Zhan, 2001, Case C, $y_0 = -\infty$, $z_0 = 0$):

$$C(x, z, t) = \frac{q_l}{2mn\sqrt{\pi D_x R}} \exp\left(\frac{ux}{2D_x}\right) \int_0^t \frac{1}{\tau^{1/2}} \exp\left[-\frac{\mu^2 \tau}{4D_x R} - \frac{Rx^2}{4D_x \tau}\right] \times \\ \times \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi z}{m} \exp\left(-\frac{D_z n^2 \pi^2}{Rm^2} \tau\right)\right] d\tau, \quad \mu = \sqrt{u^2 + 4D_x R \lambda}. \quad (\text{X.81})$$

где q_l – удельная интенсивность источника $[\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}]$.

Общий случай расположения источника на глубине $z_0 > 0$ (Park, Zhan, 2001, Case C, $y_0 = -\infty$):

$$C(x, z, t) = \frac{q_l}{2mn\sqrt{\pi D_x R}} \exp\left(\frac{ux}{2D_x}\right) \int_0^t \frac{1}{\tau^{1/2}} \exp\left[-\frac{\mu^2 \tau}{4D_x R} - \frac{Rx^2}{4D_x \tau}\right] \times \\ \times \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi z_0}{m} \cos \frac{n\pi z}{m} \exp\left(-\frac{D_z n^2 \pi^2}{Rm^2} \tau\right)\right] d\tau. \quad (\text{X.82})$$

Для экспоненциально затухающего источника в решениях (X.81) и (X.82) в производится замена:

$$\exp\left(\frac{ux}{2D_x}\right) \rightarrow \exp\left(\frac{ux}{2D_x} - \lambda t\right), \quad \mu \rightarrow u, \quad (\text{X.83})$$

что дает:

$$C(x, z, t) = \frac{q_l}{2mn\sqrt{\pi D_x R}} \exp(-\lambda t) \int_0^t \frac{1}{\tau^{1/2}} \exp\left[-\frac{(u\tau - Rx)^2}{4D_x R\tau}\right] \times \\ \times \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi z}{m} \exp\left(-\frac{D_z n^2 \pi^2}{Rm^2} \tau\right) \right] d\tau; \quad (\text{X.84})$$

$$C(x, z, t) = \frac{q_l}{2mn\sqrt{\pi D_x R}} \exp(-\lambda t) \int_0^t \frac{1}{\tau^{1/2}} \exp\left[-\frac{(u\tau - Rx)^2}{4D_x R\tau}\right] \times \\ \times \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi z_0}{m} \cos \frac{n\pi z}{m} \exp\left(-\frac{D_z n^2 \pi^2}{Rm^2} \tau\right) \right] d\tau. \quad (\text{X.85})$$

Если константа, характеризующая распад в источнике, λ_s , отличается от константы распада в пласте, λ , то формулам (X.81) и (X.82) соответствуют решения

$$C(x, z, t) = \frac{q_l}{2mn\sqrt{\pi D_x R}} \int_0^t \frac{1}{\tau^{1/2}} \exp[-\lambda_s(t - \tau)] \exp(-\lambda\tau) \exp\left[-\frac{(u\tau - Rx)^2}{4D_x R\tau}\right] \times \\ \times \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi z}{m} \exp\left(-\frac{D_z n^2 \pi^2}{Rm^2} \tau\right) \right] d\tau; \quad (\text{X.86})$$

$$C(x, z, t) = \frac{q_l}{2mn\sqrt{\pi D_x R}} \int_0^t \frac{1}{\tau^{1/2}} \exp[-\lambda_s(t - \tau)] \exp(-\lambda\tau) \exp\left[-\frac{(u\tau - Rx)^2}{4D_x R\tau}\right] \times \\ \times \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi z_0}{m} \cos \frac{n\pi z}{m} \exp\left(-\frac{D_z n^2 \pi^2}{Rm^2} \tau\right) \right] d\tau. \quad (\text{X.87})$$

Для импульсного входного сигнала:

$$C_i(x, z, t) = \frac{M_0}{2mn\sqrt{\pi D_x R t}} \exp(-\lambda t) \exp\left[-\frac{(u\tau - Rx)^2}{4D_x R\tau}\right] \times \\ \times \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi z}{m} \exp\left(-\frac{D_z n^2 \pi^2}{Rm^2} \tau\right) \right]; \quad (\text{X.88})$$

$$C_i(x, z, t) = \frac{M_0}{2mn\sqrt{\pi D_x R t}} \exp(-\lambda t) \exp\left[-\frac{(u\tau - Rx)^2}{4D_x R\tau}\right] \times \\ \times \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi z_0}{m} \cos \frac{n\pi z}{m} \exp\left(-\frac{D_z n^2 \pi^2}{Rm^2} \tau\right) \right]. \quad (\text{X.89})$$

где M_0 – удельная масса (на единицу длины линейного источника) $[\text{ML}^{-1}]$.

Х.4.2. Источник в форме вертикальной пластины бесконечной протяженности (рис. Х.9)

Решение представлено в работе (Park, Zhan, 2001, Case E, $z_0 = 0$, H -глубина источника):

$$C(x, z, t) = \frac{q_a}{2mn\sqrt{\pi D_x R}} \exp\left(\frac{ux}{2D_x}\right) \int_0^t \frac{1}{\tau^{1/2}} \exp\left[-\frac{\mu^2 \tau}{4D_x R} - \frac{Rx^2}{4D_x \tau}\right] \times \\ \times \left[H + \frac{2m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi H}{m} \cos \frac{n\pi z}{m} \exp\left(-\frac{D_z n^2 \pi^2}{Rm^2} \tau\right) \right] d\tau, \quad \mu = \sqrt{u^2 + 4D_x R \lambda}, \quad (\text{X.90})$$

где q_a – удельная интенсивность источника (масса на единицу площади) $[\text{ML}^{-2}\text{T}^{-1}]$, $q_a = C_0 v$.

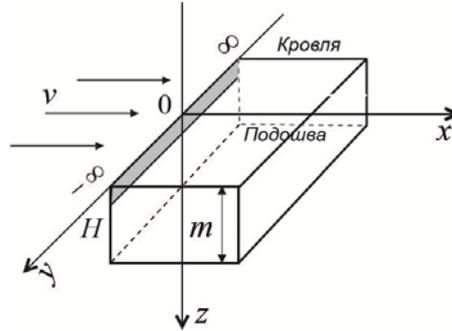


Рис. Х.9. Источник в форме вертикальной пластины с неограниченными по направлению y сторонами

Общий случай: плоский источник в интервале глубин $z_0 < z < z_1$ (Park, Zhan, 2001, Case E, $z_1 > z_0 > 0$):

$$C(x, z, t) = \frac{q_a}{2mn\sqrt{\pi D_x R}} \exp\left(\frac{ux}{2D_x}\right) \int_0^t \frac{1}{\tau^{1/2}} \exp\left[-\frac{\mu^2 \tau}{4D_x R} - \frac{Rx^2}{4D_x \tau}\right] \times \quad (\text{X.91}) \\ \times \left[H + \frac{2m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{n\pi(z_0 + H)}{m} - \sin \frac{n\pi z_0}{m} \right) \cos \frac{n\pi z}{m} \exp\left(-\frac{D_z n^2 \pi^2}{Rm^2} \tau\right) \right] d\tau, \quad \mu = \sqrt{u^2 + 4D_x R \lambda}.$$

причем $z_1 - z_0 = H$.

Для экспоненциально затухающего источника в решениях (X.90) и (X.91) производится замена:

$$\exp\left(\frac{ux}{2D_x}\right) \rightarrow \exp\left(\frac{ux}{2D_x} - \lambda t\right), \quad \mu \rightarrow u, \quad (\text{X.92})$$

что, соответственно, дает:

$$C(x, z, t) = \frac{q_a}{2mn\sqrt{\pi D_x R}} \exp(-\lambda t) \int_0^t \frac{1}{\tau^{1/2}} \exp\left[-\frac{(u\tau - Rx)^2}{4D_x R\tau}\right] \times \\ \times \left[H + \frac{2m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi H}{m} \cos \frac{n\pi z}{m} \exp\left(-\frac{D_z n^2 \pi^2}{m^2} \tau\right) \right] d\tau; \quad (\text{X.93})$$

$$C(x, z, t) = \frac{q_a}{2mn\sqrt{\pi D_x R}} \exp(-\lambda t) \int_0^t \frac{1}{\tau^{1/2}} \exp\left[-\frac{(u\tau - Rx)^2}{4D_x R\tau}\right] \times \\ \times \left[H + \frac{2m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{n\pi(z_0 + H)}{m} - \sin \frac{n\pi z_0}{m} \right) \cos \frac{n\pi z}{m} \exp\left(-\frac{D_z n^2 \pi^2}{Rm^2} \tau\right) \right] d\tau. \quad (\text{X.94})$$

Если константа, характеризующая распад в источнике, λ_s , отличается от константы распада в пласте, λ , то формулам (X.93) и (X.94) соответствуют решения:

$$C(x, z, t) = \frac{q_a}{2mn\sqrt{\pi D_x R}} \int_0^t \frac{1}{\tau^{1/2}} \exp[-\lambda_s(t - \tau)] \exp(-\lambda\tau) \exp\left[-\frac{(u\tau - Rx)^2}{4D_x R\tau}\right] \times \\ \times \left[H + \frac{2m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi H}{m} \cos \frac{n\pi z}{m} \exp\left(-\frac{D_{zz} n^2 \pi^2}{Rm^2} \tau\right) \right] d\tau; \quad (\text{X.95})$$

$$C(x, z, t) = \frac{q_a}{2mn\sqrt{\pi D_x R}} \int_0^t \frac{1}{\tau^{1/2}} \exp[-\lambda_s(t - \tau)] \exp(-\lambda\tau) \exp\left[-\frac{(u\tau - Rx)^2}{4D_x R\tau}\right] \times \\ \times \left[H + \frac{2m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{n\pi(z_0 + H)}{m} - \sin \frac{n\pi z_0}{m} \right) \cos \frac{n\pi z}{m} \exp\left(-\frac{D_z n^2 \pi^2}{Rm^2} \tau\right) \right] d\tau. \quad (\text{X.96})$$

Для импульса:

$$C_i(x, z, t) = \frac{M_a}{2mn\sqrt{\pi D_x R t}} \exp(-\lambda t) \exp\left[-\frac{(ut - Rx)^2}{4D_x R t}\right] \times \\ \times \left[H + \frac{2m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi H}{m} \cos \frac{n\pi z}{m} \exp\left(-\frac{D_z n^2 \pi^2}{Rm^2} t\right) \right]; \quad (\text{X.97})$$

$$C_i(x, z, t) = \frac{M_a}{2m\sqrt{\pi D_x R t}} \exp(-\lambda t) \exp\left[-\frac{(ut - Rx)^2}{4D_x R t}\right] \times \\ \times \left[H + \frac{2m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{n\pi(z_0 + H)}{m} - \sin \frac{n\pi z_0}{m} \right) \cos \frac{n\pi z}{m} \exp\left(-\frac{D_z n^2 \pi^2}{Rm^2} t\right) \right], \quad (\text{X.98})$$

где M_a – удельная масса (на единицу площади источника) $[\text{ML}^{-2}]$.

В случае весьма малой глубины источника (теоретически при $H \rightarrow 0$) все приведенные выше решения для пластины переходят в решения для линейного источника (разд. X.4.1) при $q_l = q_a H$.

Х.4.3. Горизонтальный источник в форме пластины бесконечной протяженности (рис. Х.10)

Решение представлено в работе (Park, Zhan, 2001, Case F, $y_0 = \text{inf}, z_0=0$):

$$C(x, z, t) = \frac{q_a}{2mnR} \int_0^t \exp(-\lambda\tau) \left[\operatorname{erfc} \frac{x-L-u\tau/R}{2\sqrt{D_x\tau/R}} - \operatorname{erfc} \frac{x-u\tau/R}{2\sqrt{D_x\tau/R}} \right] \times \\ \times \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi z}{m} \exp\left(-\frac{D_z n^2 \pi^2}{Rm^2} \tau\right) \right] d\tau, \quad (\text{X.99})$$

где q_a – интенсивность площадного источника [$\text{ML}^{-2}\text{T}^{-1}$], $q_a = C_0 q'$, $q' = qW$ – удельный расход [$\text{L}^{-1}\text{T}^{-1}$], H – глубина источника.

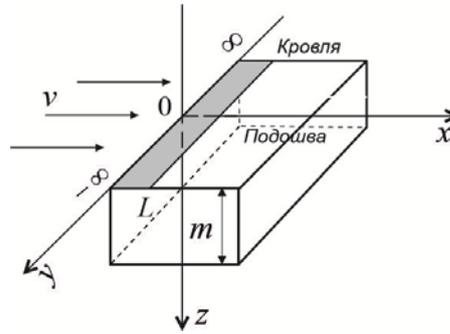


Рис. Х.10. Представление горизонтального источника в форме неограниченной пластины, расположенной на поверхности ограниченного по мощности горизонта

Общий случай: плоский источник на глубине $z = z_0$ (Park, Zhan, 2001, Case F, $y_0 = \text{inf}$):

$$C(x, z, t) = \frac{q_a}{2mnR} \int_0^t \exp(-\lambda\tau) \left[\operatorname{erfc} \frac{x-L-u\tau/R}{2\sqrt{D_x\tau/R}} - \operatorname{erfc} \frac{x-u\tau/R}{2\sqrt{D_x\tau/R}} \right] \times \\ \times \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi z_0}{m} \cos \frac{n\pi z}{m} \exp\left(-\frac{D_z n^2 \pi^2}{Rm^2} \tau\right) \right] d\tau. \quad (\text{X.100})$$

Для экспоненциально затухающего источника (X.99) и (X.100) соответствуют решения:

$$C(x, z, t) = \frac{q_a}{2mnR} \exp(-\lambda t) \int_0^t \left[\operatorname{erfc} \frac{x-L-u\tau/R}{2\sqrt{D_x\tau/R}} - \operatorname{erfc} \frac{x-u\tau/R}{2\sqrt{D_x\tau/R}} \right] \times \\ \times \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi z}{m} \exp\left(-\frac{D_z n^2 \pi^2}{Rm^2} \tau\right) \right] d\tau; \quad (\text{X.101})$$

$$C(x, z, t) = \frac{q_a}{2mnR} \exp(-\lambda t) \int_0^t \left[\operatorname{erfc} \frac{x-L-u\tau/R}{2\sqrt{D_x\tau/R}} - \operatorname{erfc} \frac{x-u\tau/R}{2\sqrt{D_x\tau/R}} \right] \times \\ \times \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi z_0}{m} \cos \frac{n\pi z}{m} \exp\left(-\frac{D_z n^2 \pi^2}{Rm^2} \tau\right) \right] d\tau. \quad (\text{X.102})$$

Если константа, характеризующая распад в источнике, λ_s , отличается от константы распада в пласте, λ , то формулам (X.101) и (X.102) соответствуют решения:

$$C(x, z, t) = \frac{q_a}{2mnR} \int_0^t \exp[-\lambda_s(t-\tau)] \exp(-\lambda\tau) \left[\operatorname{erfc} \frac{x-L-u\tau/R}{2\sqrt{D_x\tau/R}} - \operatorname{erfc} \frac{x-u\tau/R}{2\sqrt{D_x\tau/R}} \right] \times \\ \times \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi z}{m} \exp\left(-\frac{D_z n^2 \pi^2}{Rm^2} \tau\right) \right] d\tau; \quad (\text{X.103})$$

$$C(x, z, t) = \frac{q_a}{2mnR} \int_0^t \exp[-\lambda_s(t-\tau)] \exp(-\lambda\tau) \left[\operatorname{erfc} \frac{x-L-u\tau/R}{2\sqrt{D_x\tau/R}} - \operatorname{erfc} \frac{x-u\tau/R}{2\sqrt{D_x\tau/R}} \right] \times \\ \times \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi z_0}{m} \cos \frac{n\pi z}{m} \exp\left(-\frac{D_z n^2 \pi^2}{Rm^2} \tau\right) \right] d\tau. \quad (\text{X.104})$$

Для импульса:

$$C_i(x, z, t) = \frac{M_a}{2mnR} \exp(-\lambda t) \left[\operatorname{erfc} \frac{x-L-ut/R}{2\sqrt{D_x t/R}} - \operatorname{erfc} \frac{x-ut/R}{2\sqrt{D_x t/R}} \right] \times \\ \times \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi z}{m} \exp\left(-\frac{D_z n^2 \pi^2}{Rm^2} t\right) \right]; \quad (\text{X.105})$$

$$C_i(x, z, t) = \frac{M_a}{2mnR} \exp(-\lambda t) \left[\operatorname{erfc} \frac{x-L-ut/R}{2\sqrt{D_x t/R}} - \operatorname{erfc} \frac{x-ut/R}{2\sqrt{D_x t/R}} \right] \times \\ \times \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi z_0}{m} \cos \frac{n\pi z}{m} \exp\left(-\frac{D_z n^2 \pi^2}{Rm^2} t\right) \right], \quad (\text{X.106})$$

где M_a – удельная масса (на единицу площади источника) $[\text{ML}^{-2}]$.

X.5. Задачи трехмерной конвективной дисперсии 3D в ограниченных по мощности пластах

Для нахождения общего решения уравнения (X.1) для концентрационных источников фиксированных (конечных) размеров (Leij, van Genuchten, 2000; Leij et al., 2000; Park, Zhan, 2001) может также использоваться функции Грина. Метод суперпозиции позволяет учесть ограниченность пласта по мощности (Park, Zhan, 2001).

В общем случае, для объемного источника, находящегося ниже кровли (уровня подземных вод) (рис. X.11) ($z_0 > 0$) решение имеет вид (Park, Zhan, 2001, Eq. 22):

$$\begin{aligned}
 C(x, y, z, t) = & \frac{q_v}{4mnR_0} \int_0^t \exp(-\lambda\tau) \left[\operatorname{erfc} \frac{x-u\tau-L}{2\sqrt{D_x\tau}} - \operatorname{erfc} \frac{x-u\tau}{2\sqrt{D_x\tau}} \right] \times \\
 & \times \left[\operatorname{erfc} \frac{y-W/2}{2\sqrt{D_y\tau}} - \operatorname{erfc} \frac{y+W/2}{2\sqrt{D_y\tau}} \right] \times \\
 & \times \left[H + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi(z_0+H)}{m} - \sin \frac{n\pi z_0}{m} \right) \cos \frac{n\pi z}{m} \times \exp \left[- \left(\frac{D_z n^2 \pi^2}{Rm^2} \right) \tau \right] \right] d\tau,
 \end{aligned} \tag{X.107}$$

где q_v – интенсивность объемного источника, q_v [$\text{ML}^{-3}\text{T}^{-1}$].

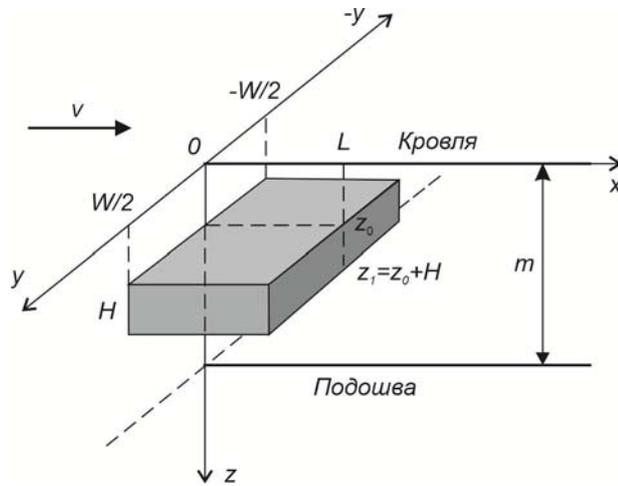


Рис. X.11. Представление объемного 3D источника в ограниченном по мощности пласте

Для источника, примыкающего к кровле пласта, решение имеет вид (Park, Zhan, 2001, Eq. 22, $z_0 = 0$):

$$\begin{aligned}
 C(x, y, z, t) = & \frac{q_v}{4mnR_0} \int_0^t \exp(-\lambda\tau) \left[\operatorname{erfc} \frac{x-u\tau-L}{2\sqrt{D_x\tau}} - \operatorname{erfc} \frac{x-u\tau}{2\sqrt{D_x\tau}} \right] \times \\
 & \times \left[\operatorname{erfc} \frac{y-W/2}{2\sqrt{D_y\tau}} - \operatorname{erfc} \frac{y+W/2}{2\sqrt{D_y\tau}} \right] \times \\
 & \times \left[H + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi z_1}{m} \right) \cos \frac{n\pi z}{m} \times \exp \left[- \left(\frac{D_z n^2 \pi^2}{Rm^2} \right) \tau \right] \right] d\tau,
 \end{aligned} \tag{X.108}$$

Для экспоненциально затухающего источника используется в решениях (X.107) и (X.108) в подынтегральных функциях производится замена:

$$\exp(-\lambda\tau) \rightarrow \exp(-\lambda t). \tag{X.109}$$

Если константа, характеризующая распад в источнике, λ_s , отличается от константы распада в пласте, λ , то в подынтегральных функциях в решениях (X.107) и (X.108) появляется дополнительный экспоненциальный множитель:

$$\exp[-\lambda_s(t - \tau)]. \quad (\text{X.109a})$$

В случае импульсного концентрационного сигнала решения (X.107) и (X.108) преобразуются к виду:

$$C_i(x, y, z, t) = \frac{C_0}{4mnR} \exp(-\lambda t) \left[\operatorname{erfc} \frac{x-ut-L}{2\sqrt{D_x t}} - \operatorname{erfc} \frac{x-ut}{2\sqrt{D_x t}} \right] \times \\ \times \left[\operatorname{erfc} \frac{y-W/2}{2\sqrt{D_y t}} - \operatorname{erfc} \frac{y+W/2}{2\sqrt{D_y t}} \right] \times \\ \times \left[H + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi(z_0+H)}{m} - \sin \frac{n\pi z_0}{m} \right) \cos \frac{n\pi z}{m} \times \exp \left[- \left(\frac{D_z n^2 \pi^2}{Rm^2} \right) t \right] \right]; \quad (\text{X.110})$$

$$C_i(x, y, z, t) = \frac{C_0}{4mnR} \exp(-\lambda t) \left[\operatorname{erfc} \frac{x-ut-L}{2\sqrt{D_x t}} - \operatorname{erfc} \frac{x-ut}{2\sqrt{D_x t}} \right] \times \\ \times \left[\operatorname{erfc} \frac{y-W/2}{2\sqrt{D_y t}} - \operatorname{erfc} \frac{y+W/2}{2\sqrt{D_y t}} \right] \times \\ \times \left[H + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi z_1}{m} \right) \cos \frac{n\pi z}{m} \times \exp \left[- \left(\frac{D_z n^2 \pi^2}{Rm^2} \right) t \right] \right], \quad (\text{X.111})$$

здесь $C_0 = M/(LWH)$.

Ряд частных решения для точечного, линейного источников и источника в форме пластины (различной ориентации относительно направления фильтрационного потока) приведены в работе (Park, Zhan, 2001) и реализованы в программном комплексе ANSDIMATC.

Литература

Allen D.A. Dispersion modeling of multiple sources using the HP-41CV // Ground Water. 1985. Vol. 23. N 1. P. 85–91.

Batu V. Applied flow and solute transport modeling in aquifers. 2006. CRC Press, Taylor & Francis Group. 667 p.

Charbeneau R. J. Groundwater Hydraulics and Pollutant Transport. Prentice Hall, Upper Saddle River. N. Y., 2000. 537 p.

Domenico P.A. An analytical model for multidimensional transport of a decaying contaminant species. *Journal of hydrology*, 91 (1987) 49-58.

Domenico P.A., Robbins G.A. A New Method of Contaminant Plume Analysis // *Ground Water*. 1985. Vol. 23. N 4. P. 476–485.

Galya D.P. A horizontal plane source model for ground-water transport. *Ground Water* 25:733–739. 1987.

Hantush M. S. *Hydraulics of wells // Advances in Hydrosience / Ed. by Ven Te Chow*. New York; London: Academic Press, 1964. Vol. 1. P. 281—432.

Hunt B. Dispersive sources in uniform ground-water flow // *Journ. Hydraul. Div.* 1978. Vol. 104, HY 1. P. 75–85.

Guyonnet D., Neville C. Dimensionless analysis of two analytical solutions for 3-D solute transport in groundwater // *Journ. of Contamin. Hydrol.* 2004. Vol. 75. P. 141–153.

Leij F.J., Priesack E., G. Schaap M.G. Solute transport modeled with Green's functions *Journal of Contaminant Hydrology* 41 2000. 155 - .

Leij F.J., Van Genuchten M. Th. Analytical Modeling of Nonaqueous Phase Liquid Dissolution with Green's Functions *Transport in Porous Media* 38: 141–166, 2000. DOI:10.1023/A:1006611200487

Paladino, O., Moranda, M., Massab`o, M., Robbins, G.A. Analytical Solutions of Three-Dimensional Contaminant Transport Models with Exponential Source Decay. *Groundwater*, 2017.

Sangani J., Srinivasan V. Improved Domenico solution for three-dimensional contaminant transport *Journal of Contaminant Hydrology*. 2021, v. 243, 103897. <https://doi.org/10.1016/j.jconhyd.2021.103897>.

Wagner, J., Watts, S. A. and Kent, D. C. (1985), *Plume 3D: Three-Dimensional Plumes in Uniform Ground Water Flow*, Project Report CR81 1142, EPA 600/2-85-067, PB85-214443, Robert S. Kerr Environmental Research Laboratory, USEPA, Ada, OK.

West M.R., Kueper B.H., Unga M.J. On the use and error of application in the Domenico (1987) solution // *Ground Water*. 2007. Vol. 45. N 2. P. 126–135.

Wilson J.W., Miller P.J. Two-Dimensional Plume in Uniform Ground-Water Flow. 1978 *American Society of Civil Engineers* 104(4). DOI:10.1061/JYCEAJ.0004975

Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.

Мироненко В.А. Румынин В.Г. Проблемы гидрогеоэкологии, т.1, 1998

Мироненко В.А., Румынин В. Г. Опыт-но-миграционные работы в водоносных пластах. М.: Недра. 1986. 280 с.

Румынин В.Г. Теория и методы изучения загрязнения подземных вод. Учебник для вузов. 2020.

Румынин В.Г. Геомиграционные модели в гидрогеологии. Наука, 2011.