

# Конвективный перенос в профильно-неоднородном пласте при площадной инфильтрации

проф. Румынин В.Г.

Миграционный процесс рассматривается в стационарном фильтрационном потоке подземных вод, для которого в декартовой системе координат справедливо уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

– дифференциальная форма представления закона сохранения массы в механике сплошных сред; здесь  $v_x$  и  $v_z$  – горизонтальная и вертикальная компоненты скорости фильтрации (Дарси). Уравнение (1) рассматривается совместно с уравнением баланса вещества:

$$nR_d \frac{\partial C}{\partial t} + v_x \frac{\partial C}{\partial x} + v_z \frac{\partial C}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

где  $C$  – концентрация вещества в единице объема раствора [ $ML^{-3}$ ],  $n$  – пористость (трещиноватость),  $R_d$  – фактор сорбционного распределения.

Уравнение (2) является линейным однородным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка относительно концентрационной функции  $C$  с тремя независимыми переменными. Существует несколько способов решения уравнения (2), среди которых предпочтение отдается методу характеристик. Достаточно удобным и наглядным является метод, основанный на предварительном нахождении решений вспомогательных уравнений. Известно, что уравнению в частных производных (2) соответствует система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u_x} = \frac{dz}{u_z}, \quad (3)$$

которая в данном контексте дополняет уравнение неразрывности (1) и может быть представлена в виде двух независимых уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = u_x, \quad \frac{dz}{dt} = u_z; \quad (4)$$

здесь  $u_x = v_x / nR_d$  и  $u_z = v_z / nR_d$  – компоненты действительной скорости миграции сорбируемого компонента, каждая из которых в общем случае является функцией двух пространственных координат.

## 1. Напорный водоносный горизонт

Рассмотрим источник загрязнения подземных вод в форме пластины, расположенный в полуограниченном напорном водоносном горизонте, расход потока в котором определяется инфильтрацией атмосферных вод и фильтрационным потоком на входной границе  $x = 0$  (рис. 1). Дисперсионным рассеянием вещества будем пренебрегать. В фильтрационном отношении горизонт является профильно-неоднородным, т.е. характеризуется изменчивостью коэффициента фильтрации по глубине  $k = k(z)$ . Это может

быть, как слоистая толща осадочного генезиса, так и массив трещиноватых пород, проницаемость которых, как правило, падает с глубиной.

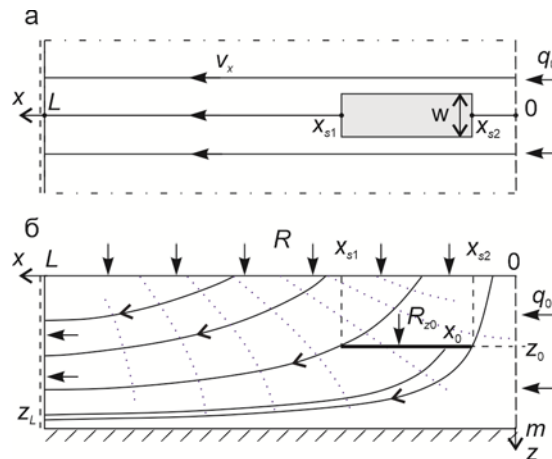


Рис. 1. Концептуальная модель структуры потока в плане (а) и разрезе (б).

### 1.1. Поле скоростей фильтрации и структура потока

Удельный расход фильтрационного потока в полуограниченном пласте (рис. 1) определяется выражением

$$q = q_0 + Rx = -T_m \frac{dh}{dx}, \quad T_m = \int_0^m k(z) dz, \quad (5)$$

что справедливо, когда гидравлический градиент потока не зависит от вертикальной координаты  $z$  – предпосылка Дюпюи–Форхгеймера;  $R$  – удельный инфильтрационный поток на кровлю горизонта (инфильтрация);  $q_0$  – естественный поток при  $x = 0$ ;  $T_m$  – суммарная проводимость; здесь  $h = h(x)$  – гидродинамический напор.

Из последнего равенства получаем выражение для горизонтальной скорости фильтрации

$$v_x = -k(z) \frac{dh}{dx} = Rk(z) \frac{x + q_0/R}{T_m}. \quad (6)$$

В результате интегрирования уравнения неразрывности (1) при  $v_z|_{z=0} = R$  получаем

$$v_z - R = - \int_0^z \frac{\partial v_x}{\partial x} dz, \quad (7a)$$

или

$$v_z = R_z = R \left( 1 - \frac{T_z}{T_m} \right), \quad T_z = \int_0^z k(z) dz. \quad (7b)$$

Представленных соотношений (имеющих в гидрогеологии фундаментальный характер), дополненных кинематическим равенством (разд. 2), оказывается достаточным для решения миграционной задачи;  $T_z$  – проводимость в интервале  $[0, z]$ .

Координаты траекторий движения частиц вещества в слоистом пласте определяются решением системы (4). Поделив друг на друга ее правые и левые части, получаем уравнение

$$\frac{v_z}{v_x} = \frac{dz}{dx}, \quad (8)$$

или, с учетом выражений (6) и (7) для скоростей  $v_x$  и  $v_z$ ,

$$\frac{k(z)dz}{T_m - T_z} = \frac{dx}{x + q_0 / R}. \quad (9)$$

или, с учетом тождества  $k(z)dz = dT_z$ ,

$$\frac{dT_z}{T_m - T_z} = \frac{dx}{x + q_0 / R}. \quad (10)$$

Интегрирование (10) в интервалах  $[T_0, T_z]$  и  $[x_0, x]$  дает соотношение для определения характеристики  $z = f(x)$  – координаты линии тока, берущей начало на плоскости источника в точке  $x_0(z_0)$ :

$$\frac{x_0 + q_0 / R}{x + q_0 / R} = \frac{T_m - T_z}{T_m - T_{z_0}}, \quad (11)$$

здесь

$$T_z = \int_0^z k(z)dz, \quad T_0 = \int_0^{z_0} k(z)dz, \quad (11a)$$

т.е. искомая координата  $z$  является верхним пределом интеграла  $T_z$  (11a). Как видно, траектории движения частиц не зависят от величины инфильтрационного потока.

## 1.2. Основное кинематическое равенство

Зависимость для характеристики  $t(z)$  – времени нахождения частицы, имеющей текущую координату  $z$ , в пласте определяется интегрированием второго из системы кинематических уравнений (4):

$$\int_0^t dt = nR_d \int_{z_0}^z \frac{dz}{v_z}, \quad (12)$$

Учитывая (7б), приходит к равенству

$$t = \frac{nR_d}{R} \int_{z_0}^z \frac{dz}{1 - T_z / T_m}. \quad (13)$$

## 1.3. Концентрационные распределения

Представленные здесь расчетные зависимости строятся применительно к условиям миграции сорбированного компонента, подверженному радиоактивному распаду, протекающему как в водоносной толще, так и в источнике загрязнения.

### 1.3.1. Источник загрязнения как функция концентрации

При поддержании постоянной концентрации  $C_0$  на контуре  $x_{s1} - x_{s2}$ , средняя относительная концентрация в выходном сечении потока  $x = L$  определяется проводимостью участка разгрузки фильтрационного потока в пределах ленты тока  $x_{s1}(t_1) - x_0(t)$ , отнесенной к суммарной проводимости пласта,

$$\frac{C(t)}{C_0} = F(t) = \frac{T_L(t) - T_L(t_1)}{T_m}, \quad t_1 \leq t < t_2. \quad (14a)$$

$$\frac{C(t)}{C_0} = \frac{T_L(t_2) - T_L(t_1)}{T_m}, \quad t \geq t_2. \quad (14б)$$

здесь  $t_1$  и  $t_2$  – время миграции растворенного вещества от границ источника;  $t$  – текущее время для точек  $x_0(t)$ ;  $T_L(t_1)$  – проводимость, в интервале  $[0, z_L(x_{s1})]$ , определяемом приходом вещества по линии тока  $x_{s1}$  (рис. 1) в момент  $t_1$  по формуле (11);  $T_L(t)$  – проводимость в сечении  $x = L$  в интервале  $[0, z_L(t)]$ ;

По сути, функция  $F(\tau)$ , обозначенная в решении (14), – соотношение массовых потоков загрязненной воды к суммарному потоку воды в выходном сечении.  $F(\tau)$  может ассоциироваться с функцией кумулятивного распределения времени (Румынин, 2020). Формула (14б) отвечает предельной величине разбавления загрязненных вод чистыми инфильтрационными водами в случае  $x_{s1} > 0$ .

Решение для компонента, подверженного распаду, принимает вид

$$\frac{C(t)}{C_0} = \frac{T_L(t) - T_L(t_1)}{T_m} \exp(-\lambda t), \quad t \geq t_1. \quad (15)$$

### 1.3.2. Источник загрязнения как импульсная функция

Теперь рассмотрим случай, когда поступление вещества в водоносный горизонт на участке  $x_{s1} - x_{s2}$  на глубине  $z = z_0$  имеет импульсный характер, определяемый дельта-функцией Дирака

$$C_{in}(t) = \frac{P}{R_z} \delta(t), \quad (16)$$

где  $P$  – масса вещества на единицу площади источника загрязнения  $[ML^{-2}]$ .

Одним из способов решения задачи для данного входного сигнала является использование функции плотности вероятности времени миграции частиц вещества (ТТД функция – “transit time distribution”),  $F'(t)$ , которая связана производной с кумулятивной функцией  $F(t)$  (Haitjema, 1995):

$$F'(t) = dF(t) / dt. \quad (17)$$

$F'(t)$ , представляет собой интегрированное время отклика водоносного горизонта на входную единичную концентрацию (массу).

Введение  $F'(t)$  позволяет представить решение для произвольной входной концентрации в форме интеграла свертки (Maloszewski and Zuber, 1982; Haitjema, 1995):

$$C(t) = \int_0^{\infty} C_{in}(t - \theta) F'(\theta) \exp(-\lambda \theta) d\theta, \quad (18)$$

или, с учетом (16),

$$C(\tau) = \frac{P}{R_z} \int_0^{\infty} \delta(t - \theta) F'(\theta) \exp(-\lambda \theta) d\theta, \quad (19)$$

что окончательно дает

$$C(t) = \frac{P}{R_z} F'(t) \exp(-\lambda t), \quad t_1 \leq t < t_2, \quad (20)$$

$$C(t) = 0, \quad t \geq t_2 .$$

Таким образом, в диапазоне  $t_1 \leq t < t_2$  функция ТТД, умноженная на фактор скорости распада, является решением задачи. При  $t \geq t_2$  вся исходная масса импульса покидает систему.

#### 1.4. Частные случаи

##### 1.4.1. Однородный пласт

###### 1.4.1.1. Решение задачи

Из представленных соотношений при  $k(z) = \text{const}$  легко получается уравнение линий тока

$$\frac{x_0 + q_0 / R}{x + q_0 / R} = \frac{1 - \bar{z}}{1 - \bar{z}_0}, \quad \bar{z} = z / m, \quad \bar{z}_0 = z_0 / m. \quad (21)$$

Безразмерное время достижения растворенным веществом относительной глубины  $\bar{z}$

$$\tau = \frac{Rt}{R_d mn} = -\ln \frac{1 - \bar{z}}{1 - \bar{z}_0}. \quad (22)$$

В этом случае решение задачи (14) принимает вид

$$\frac{C(\tau)}{C_0} = F(\tau) = [\exp(-\tau_1) - \exp(-\tau)](1 - \bar{z}_0), \quad \tau_1 \leq \tau < \tau_2. \quad (23)$$

$$\frac{C(\tau)}{C_0} = [\exp(-\tau_1) - \exp(-\tau_2)](1 - \bar{z}_0), \quad \tau \geq \tau_2, \quad (24)$$

$$\tau_1 = -\ln \frac{x_{si} + q_0 / R}{L + q_0 / R}, \quad i = 1, 2.$$

В этом случае ТТД функция определяется равенством

$$F'(\tau) = \frac{dF}{d\tau} = (1 - \bar{z}_0) \exp(-\tau). \quad (25)$$

А решение для импульсной функции в размерных единицах имеет вид:

$$C(t) = \frac{PR}{R_d mn R_z} \exp\left(-\frac{Rt}{R_d mn}\right) \exp(-\lambda t) (1 - \bar{z}_0), \quad t_1 \leq t < t_2, \quad (26)$$

$$C(t) = 0, \quad t \geq t_2 .$$

Поскольку  $R_z = R(1 - \bar{z}_0)$ , решение упрощается и принимает вид

$$C(t) = \frac{P}{R_d mn} \exp\left(-\frac{Rt}{R_d mn}\right) \exp(-\lambda t), \quad t_1 \leq t < t_2, \quad (26a)$$

$$C(t) = 0, \quad t \geq t_2 .$$

### 1.4.1.2. Пример

Этот пример показывает возможность обобщения решения (26а) на случай циклического изменения входной функции  $P$ .

Рассмотрим водоносный горизонт протяженностью  $L = 1500$  м со следующими характеристиками:  $m = 10$  м,  $n = 0.2$ ,  $R = 1.3 \times 10^{-4}$  м/сут,  $q_0 = 0$ . На поверхности существует площадной источник загрязнения, связанный с внесением сельскохозяйственных удобрений. Координаты границ источника (расстояние до зоны разгрузки потока как на рис. 2):  $x_{s1} = 500$  м,  $x_{s2} = 750$  м. Удобрения содержат два типа загрязняющих компонентов: (1) химически инертный и стабильный ( $R_d = 1$ ,  $\lambda = 0$ ), (2) сорбируемый и нестабильный ( $R_d = 2$ ,  $\lambda = 5 \times 10^{-5}$  сут $^{-1}$ ). Плотность загрязнения почвы при однократном внесении удобрений  $50$  г/м $^2$  (довольно характерное для сельскохозяйственного производства значение). Количество годовых циклов внесения удобрений 9. Графически результаты решения задачи, полученного суперпозицией элементарных решений (26а), представлены на рис. 2. На этом же графике приведены кривые, отвечающие одномоментному внесению общей массы ( $50 \times 9 = 450$  г/м $^2$ ).

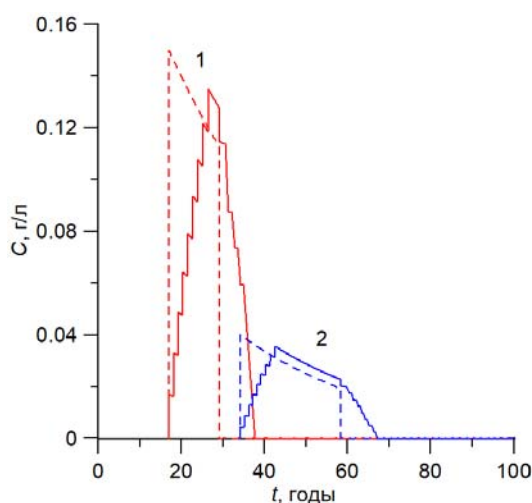


Рис. 2. Динамика изменения концентрации инертного стабильного (1) и сорбируемого распадающегося компонента (2) в выходном сечении потока. Сплошная линия – 9 циклов внесения удобрения  $50$  г/м $^2$  с периодичностью 1 год, пунктирные кривые – 1 цикл  $450$  г/м $^2$ .

Как видно, в рассматриваемом временном масштабе для региональных оценок оказывается допустимой операция суммирования массы удобрений при их циклическом внесении в почвы.

### 1.4.2. Слоистый пласт

#### 1.4.2.1. Решение задачи

При представлении напорного пласта в виде идеализированной слоистой системы (рис. 3), где каждый из  $i$ -х слоев имеет мощность  $m_i$  и коэффициент фильтрации  $k_i$ ,

формула (11) для траектории движения частиц может быть переписана в конечно-разностном виде (нумерация слоев сверху вниз):

$$\frac{x_0 + q_0 / R}{x_i + q_0 / R} = \frac{T_m - T_z^i}{T_m - T_{z_0}}, \quad (27)$$

$$T_z^i = T_{z_0} + \sum_{j=1}^i k_j m_j, \quad T_z^i > T_{z_0}, \quad (27a)$$

где  $x_i$  – расстояние до точки пересечения линии тока  $x_0(z_0)$   $x_{s1} \leq x_0 \leq x_{s2}$  с подошвой  $i$ -го слоя,  $i$  – номер слоя, в кровле которого расположен источник загрязнения,  $T_{z_0}$  – проводимость толщи в интервале  $[0, z_0]$  («накопленная» проводимость).

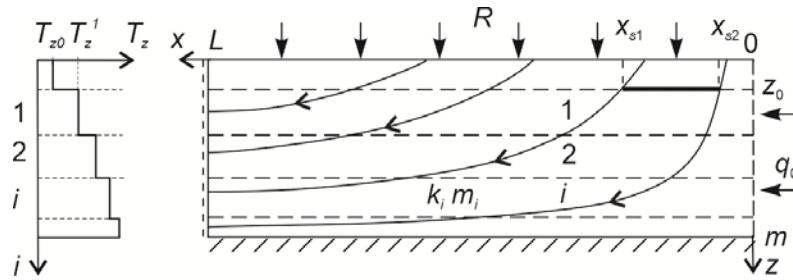


Рис. 3. Структура линий тока в слоистом пласте.

Для слоистого пласта, в котором  $k(z)$  является ступенчатой функции, с учетом тождества  $k(z_i)dz = dT_z$ , формулу (13) можно представить в виде

$$t = \frac{R_d}{R} \int_{z_{i0}}^{z_N} \frac{n T_m dT_z}{k(z_i)(T_m - T_z)}, \quad (28)$$

где  $z_{i0}$  – глубина размещения источника в кровле  $i = i_0$  слоя,  $z_N$  – глубина до подошвы расчетного слоя  $i = N$ .

Интегрирование в выражении (28) может быть заменено действием суммирования:

$$t_{N-1} = -\frac{1}{R} \sum_1^{N-1} \frac{R_d n_i T_m}{k_i} \ln \frac{T_m - T_z^i}{T_m - T_z^{i-1}}, \quad (29)$$

$$t = t_{N-1} - \frac{R_{dN}}{R} \frac{n_N T_m}{k_N} \ln \frac{T_m - T_z}{T_m - T_z^{N-1}},$$

где  $N$  – номер слоя, в котором линия тока пересекает сечение  $x = L$ ,  $t_{N-1}$  – время пересечения линией тока подошвы  $N-1$  слоя. Проводимость пласта в сечении  $x = L$  для произвольной линии тока  $x = x_0(z_0)$ , определяется формулой (27), откуда

$$T_L(t) \equiv T_z = T_m - \frac{x_0(t) + q_0 / R}{L + q_0 / R} (T_m - T_{z_0}). \quad (30)$$

Средняя концентрация в сечении  $x = L$  для случая поддержания постоянной концентрации  $C_0$  на контуре  $x_{s1} - x_{s2}$  определяется решением (14).

Формула (29) записана для случая, когда изменение пористости (трещиноватости) также, как и коэффициента фильтрации, может быть аппроксимировано ступенчатой функцией.

При поддержании постоянной концентрации  $C_0$  на контуре  $x_{s1} - x_{s2}$  средняя концентрация в выходном сечении потока  $x = L$  определяется функцией кумулятивного распределения времени  $F(t)$  (14, а, б) и (15)

Решение для импульсного источника имеет вид (20). Используя представление (14а) для ТТД функции,  $F'(t)$ , оно может быть представлено следующим образом:

$$C(t) = \frac{P}{T_m R_z} \frac{dT_L(t)}{dt} \exp(-\lambda t), t_1 \leq t \leq t_2, \quad (31)$$

$$C(t) = 0, \quad t > t_2,$$

где  $R_z = R(1 - T_{z0}/T_m)$ . Производная в этом решении определяется посредством численного дифференцирования функции  $T_L(t)$ .

При постоянных  $n$  и  $R_d$  в относительных величинах

$$\bar{C}(\tau) = \frac{mnR_d}{P} C, \tau_1 \leq \tau < \tau_2, \quad (32)$$

$$\bar{C}(\tau) = 0, \quad \tau > \tau_2,$$

где  $\tau = Rt / mnR_d$ .

#### 1.4.2.2. Пример

Рассмотрим напорный водоносный горизонт с параметрами, определенными в табл. 1 Он представлен шестью слоями (табл. 1), распределение проницаемости между которыми отвечают трем расчетным вариантам: (1) однородный горизонт, (2) горизонт с высокопроницаемым третьим в верхней части разреза, (3) горизонт с шестым высокопроницаемым слоем на подошве пласта. Во всех вариантах суммарная проводимость одинаковая,  $T_m = 240 \text{ м}^2/\text{сут}$ .

Таблица 1

$L$	$x_{s1}$	$x_{s2}$	$z_0$	$m$	$n$	$R_d$	$C_0$	$P$	$R$	$q_0$
м	м	м	м	м	—	—	кг/м <sup>3</sup>	кг/м <sup>2</sup>	м/сут	м <sup>2</sup> /сут
3000	1500	500	5	25	0.1	1	1	1000	0.0001	0

Таблица 2

Слой	Мощность, м	$k$ , м/сут		
		Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
1	5	8	6.33	6.33
2	5	8	6.33	6.33
3	5	8	50	6.33
4	5	8	6.33	6.33
5	5	8	6.33	6.33
6	5	8	6.33	50

Результаты расчетов отражены на рис. 4. На графике видно, что положение высокопроницаемого слоя определяет время прихода вещества в расчетное сечение. Абсолютные значения слабо зависят от профиля проницаемости.



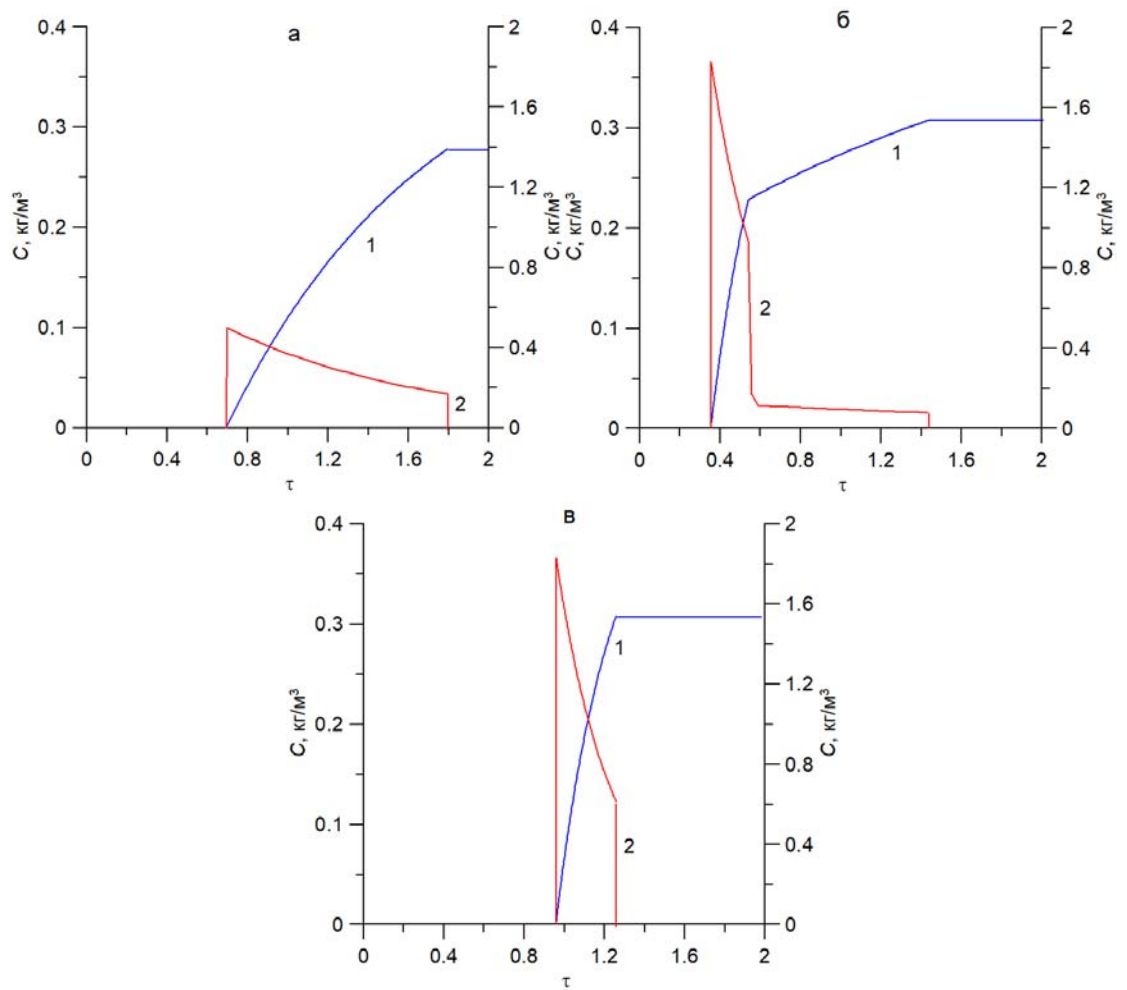


Рис. 4. Графики средней концентрации вещества в расчетном сечении  $x = L = 3000$  м. а, б, в – расчетные варианты 1, 2, 3. Цифры на графиках: 1 – постоянная концентрация в источнике  $C_0 = 1$  кг/м<sup>3</sup>; 2 – импульс с плотностью  $P = 1000$  кг/м<sup>2</sup>. Шкала слева – для условий постоянной концентрация, справа – для импульсного ГУ.  $\tau = Rt / mnR_d$ .

### 1.4.3. Пласт с экспоненциально-затухающей по глубине проницаемостью

#### 1.4.3.1. Решение задачи

Решение уравнения (11) может быть представлено и в замкнутом аналитическом виде при представлении  $k(z)$  в форме аналитической функции, описывающей изменение проницаемости по глубине. При последующем решении миграционной задачи нас будет интересовать точка  $z_L$ , характеризующая проводимость пласта  $T_m - T_{zL}$  в интервале  $[z_L, m]$  в выходном сечении фильтрационного потока (зоны разгрузки)  $x = L$  (рис. 1).

Например, для случая затухания проницаемости массива с глубиной по экспоненциальному закону (Jiang et al., 2011),

$$k(z) = k_0 \exp(-Az), \text{ или } k(\bar{z}) = k_0 \exp(-\alpha\bar{z}), \quad \alpha = Am, \quad (33)$$

получаем:

$$T_m = \frac{k_0 m}{\alpha} (1 - e^{-\alpha}), \quad T_{z_0} = \frac{k_0 m}{\alpha} (1 - e^{-\alpha \bar{z}_0}), \quad T_{zL} = \frac{k_0 m}{\alpha} (1 - e^{-\alpha \bar{z}_L}), \quad (34)$$

где  $A$  – коэффициент «затухания» (1/м).

Тогда уравнение линии тока (11) принимает вид:

$$\frac{x_0 + q_0 / R}{L + q_0 / R} = \frac{e^{-\alpha \bar{z}_L} - e^{-\alpha}}{e^{-\alpha \bar{z}_0} - e^{-\alpha}}, \quad \bar{z}_L = z_L / m, \quad \bar{z}_0 = z_0 / m. \quad (35)$$

Отсюда экспоненциальный член в выражении для  $T_{zL}$  имеет представление

$$e^{-\alpha \bar{z}_L} = \left[ \frac{x_0 + q_0 / R}{L + q_0 / R} (e^{-\alpha \bar{z}_0} - e^{-\alpha}) + e^{-\alpha} \right], \quad (36)$$

и далее

$$T_m - T_{zL} = \frac{k_0 m}{\alpha} (e^{-\alpha \bar{z}_0} - e^{-\alpha}). \quad (37)$$

После несложных операций приходим к интегральному выражению для безразмерного времени

$$\tau = \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{1 - T_z / T_m}, \quad (38)$$

где  $\tau = Rt / mnR_d$ .

Интегрирование (38) при соотношении проводимостей, определяемых из (34) (пласт с экспоненциально затухающей проницаемостью), дает

$$\tau = \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha e^{-\alpha}} \ln \frac{(e^{-\alpha \bar{z}_0} - e^{-\alpha}) e^{-\alpha \bar{z}_L}}{(e^{-\alpha \bar{z}_L} - e^{-\alpha}) e^{-\alpha \bar{z}_0}} - \quad (39)$$

– безразмерное время прибытия компонента в интервале  $[\bar{z}_0, \bar{z}_L]$ . Координата  $\bar{z}_L$  для произвольной точки  $x_0$ , определяется выражением (36), что дает  $\tau(x_0)$ . Соответственно для граничных точек  $x_{s1}(z_0)$  и  $x_{s2}(z_0)$  (рис. 1) имеем  $\tau_1$  и  $\tau_2$ .

При поддержании постоянной концентрации  $C_0$  на контуре  $x_{s1} - x_{s2}$  средняя концентрация в выходном сечении потока  $x = L$  определяется функцией кумулятивного распределения времени  $F(\tau)$  (14), или для безразмерного времени

$$\frac{C(\tau)}{C_0} = F(\tau) = \frac{T_L(\tau) - T_L(\tau_1)}{T_m}, \quad \tau_1 \leq \tau < \tau_2. \quad (40a)$$

$$\frac{C(\tau)}{C_0} = \frac{T_L(\tau_2) - T_L(\tau_1)}{T_m}, \quad \tau \geq \tau_2. \quad (40b)$$

В таком представлении  $T_L(\tau)$  – проводимость в сечении  $x = L$  в интервале  $[0, z_L(\tau)]$ ;  $T_L(\tau_1)$  – проводимость, в интервале  $[0, z_L(x_{s1})]$ , определяемом приходом вещества по линии тока  $x_{s1}$  (рис. 1) в момент  $\tau_1$ .

Основываясь на ранее представленных соотношениях, характеристика в решении для пласта с экспоненциально затухающей проницаемостью (33) может быть представлена в явном виде

$$T_L(\tau) = T_L(\tau) = \frac{k_0 m}{\alpha} [1 - e_L(\tau)], \quad (41)$$

$$e_L(\tau) = \frac{e^h s_1 s_2}{s_2 [e^h - 1] + s_1}, \quad (41a)$$

$$h = \alpha \tau s_1 / (1 - s_1), \quad s_1 = e^{-\alpha}, \quad s_2 = e^{-\alpha \bar{z}_0}. \quad (41b)$$

Решение для компонента, подверженного распаду, принимает вид

$$\frac{C(\tau)}{C_0} = F(\tau) = \frac{T_L(\tau) - T_L(\tau_1)}{T_m} \exp(-\bar{\lambda}\tau), \quad \tau_1 \leq \tau < \tau_2. \quad (42)$$

$$\frac{C(\tau)}{C_0} = F(\tau) = \frac{T_L(\tau_2) - T_L(\tau_1)}{T_m} \exp(-\bar{\lambda}\tau), \quad \tau \geq \tau_2. \quad (42a)$$

где  $\bar{\lambda} = \lambda mnR_d / R$ .

Если поступление имеет импульсный характер, то для безразмерного времени ( $\tau$ ) граничное условие (16) может быть переписано в виде

$$C_{in}(\tau) = \frac{PR}{mnR_z R_d} \delta(\tau). \quad (43)$$

Введение  $F'(\tau) = dF(\tau)/d\tau$  позволяет представить решение задачи (18) в виде

$$C(\tau) = \frac{PR}{mnR_z R_d} \int_0^{\infty} \delta(\tau - \sigma) F'(\sigma) \exp(-\bar{\lambda}\sigma) d\sigma, \quad (44)$$

что окончательно дает

$$C(\tau) = \frac{PR}{mnR_z R_d} F'(\tau) \exp(-\bar{\lambda}\tau), \quad \tau_1 \leq \tau < \tau_2, \quad (45)$$

$$C(\tau) = 0, \quad \tau \geq \tau_2.$$

Таким образом, в диапазоне  $\tau_1 \leq \tau < \tau_2$  функция ТТД, умноженная на фактор скорости распада, является решением задачи. При  $\tau \geq \tau_2$  вся исходная масса импульса покидает систему.

Применительно к рассматриваемой задаче, дифференцируя  $F(\tau)$  (42) по безразмерному времени  $\tau$ , получаем

$$F'(\tau) = \frac{dF(\tau)}{d\tau} = -\frac{k_0 m s_1^2 s_2 e^h (s_1 - s_2)}{T_m (1 - s_1)(s_1 - s_2 + s_2 e^h)^2}, \quad (46)$$

где  $h = \frac{\alpha \tau s_1}{1 - s_1}$ ,  $s_1 = e^{-\alpha}$ ,  $s_2 = e^{-\alpha \bar{z}_0}$ . При  $\alpha \rightarrow 0$

$$F'(\tau) = (1 - \bar{z}_0) \exp(-\tau) \quad (46a)$$

– однородный пласт (см. формулу 25).

#### 1.4.3.2. Пример

В данном примере рассчитываются последствия высвобождения радиоактивных вод из источника, расположенного в массиве кристаллических трещиноватых пород, причем рассматриваются три варианта размещения источника на различных глубинах  $z_0$  от поверхности (табл. 3).

Таблица. 3. Геометрия области и расположение источника

Модельная область			Источник			
$L$	$m$		$x_{s1}$	$x_{s2}$	$z_{0i}$	$S(700 \times 300 \text{m})$
М	М		М	М	М	М <sup>2</sup>
4500	600		3800	4500	200; 300; 400	210000

Предполагается, что проницаемость массива уменьшается с глубиной по экспоненциальному закону (33). Параметры, контролирующие такой профиль проницаемости, а также трещиноватость и величина инфильтрационного питания приведены в табл. 2.

Таблица 4. Характеристики массива, его инфильтрационного питания и источника загрязнения

$k_{x0}$	$A$	$n$	$R_d$	$\lambda$	$R$	$M$	$P$	$C_0$
м/сут	1/м	–	–	год <sup>-1</sup>	м/год	Бк	Бк/м <sup>2</sup>	Бк/м <sup>3</sup>
0.07	0.015	0.003	1	10 <sup>-5</sup>	0.05	1.2E+13	5.70E+07	5.70E+07

Рассматриваются два варианта входной концентрационной функции (табл. 4): а) заданная концентрация  $C_0(t) = C_0 \exp(-\lambda t)$ ; б) импульсное поступление всей активности  $M$ , накопленной в источнике, в массив, что определяет удельную плотность загрязнения  $P = M/S$ . Величина  $C_0$  (Бк/м<sup>3</sup>) условно принята равной по абсолютному значению характеристике  $P$  (Бк/м<sup>2</sup>). Теоретически это возможно, если на единицу площади источника приходится 1 м толщины слоя воды, в которой растворяется радиоактивное вещество, накопившееся в источнике.

Результаты расчетов представлены в виде графиков на рис. 5 и рис. 6.

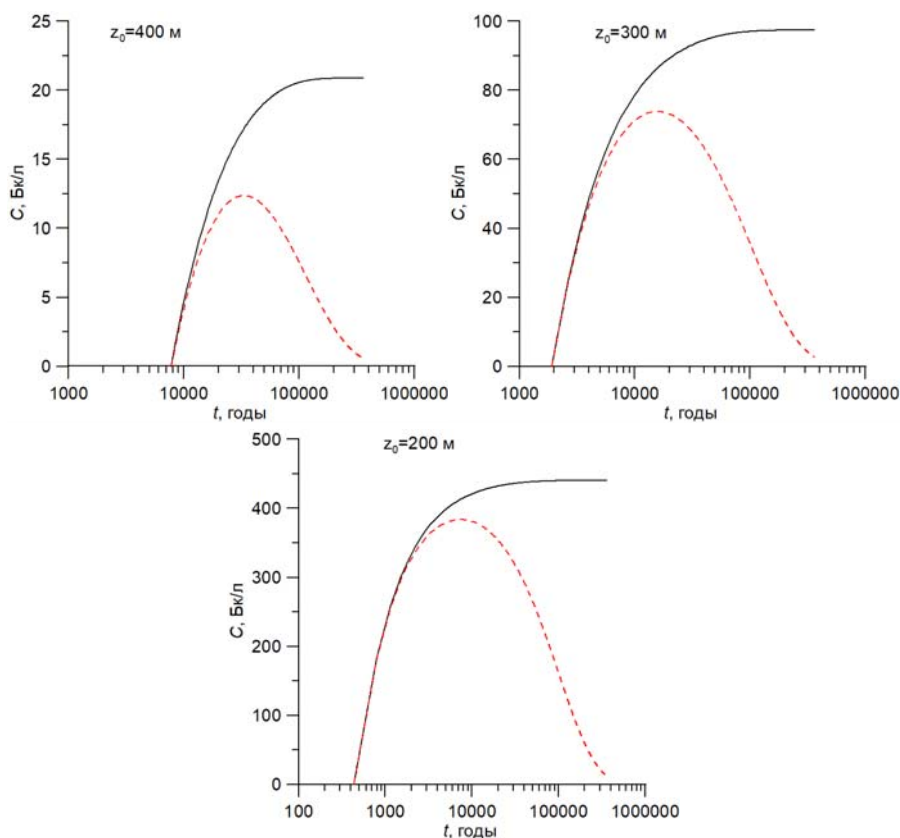


Рис. 5. Графики решения (42). Сплошные кривые –  $\lambda = 0$ , пунктирные –  $\lambda = 10^{-5}$  год<sup>-1</sup>.

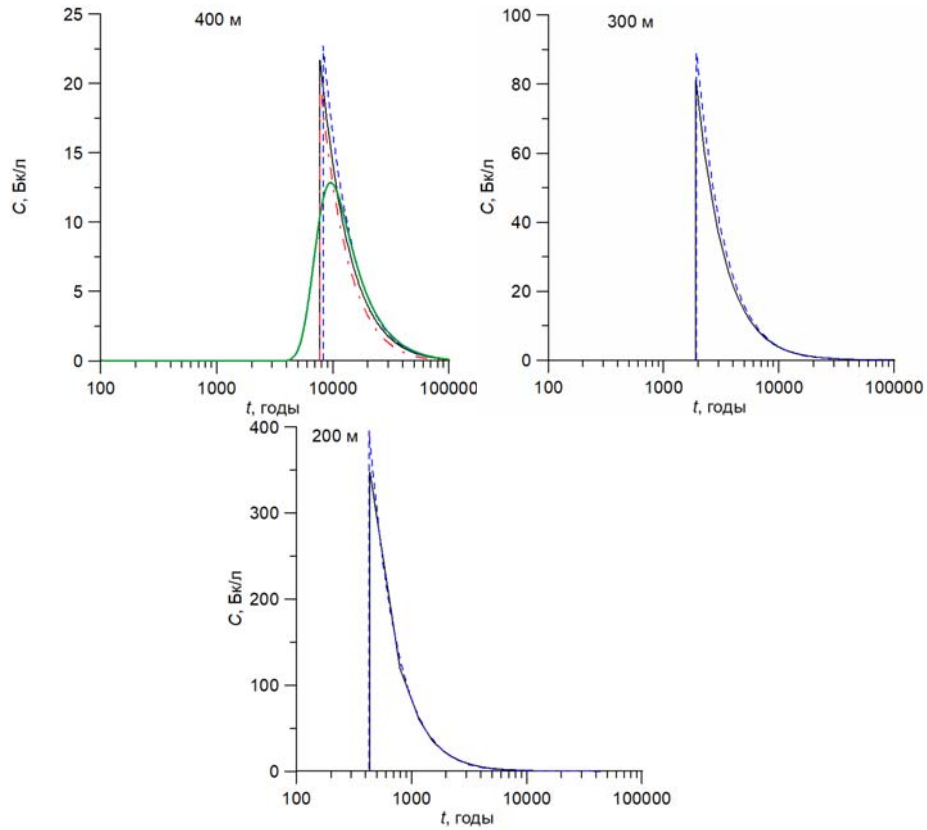


Рис. 6. Графики решения (45). Сплошные кривые – приближенное решение (45) при  $\lambda = 0$ , штрих-пунктир – решение (45) при  $\lambda = 10^{-5} \text{ год}^{-1}$ ; пунктирные кривые – аналитическое решение 2D задачи в строгой постановке (Rumunin et al., 2020), зеленая кривая на панели  $z_0 = 400 \text{ м}$  – численное решение (code Gera).

#### 1.4.4. Пласт с линейно-затухающей по глубине проницаемостью

##### 1.4.4.1. Решение задачи

Пусть падение проницаемости массива с глубиной происходит по линейному закону,

$$k(z) = k_0 - \frac{k_0 - k_m}{m} z, \text{ или } k(\bar{z}) = k_0 - (k_0 - k_m)\bar{z}, \bar{z} = z/m, \quad (47)$$

где  $k_0$  и  $k_m$  – коэффициенты фильтрации пород вблизи кровли ( $z = 0$ ) и подошвы ( $z = m$ ) водоносного горизонта.

Тогда для определения проводимостей получаем следующее соотношения:

$$T_m = \frac{k_0 + k_m}{2} m, \quad T_z = k_0 z - \frac{k_0 - k_m}{2m} z^2, \quad T_{z_0} = k_0 z_0 - \frac{k_0 - k_m}{2m} z_0^2, \quad (48)$$

Соответственно, уравнение линии тока (11) принимает вид:

$$\frac{x_0 + q_0/R}{x + q_0/R} = \frac{1 - 2a_1\bar{z} + a_2\bar{z}^2}{1 - 2a_1\bar{z}_0 + a_2\bar{z}_0^2}, \quad \bar{z}_0 = z_0/m. \quad (49)$$

Отношение проводимостей

$$\frac{T_z}{T_m} = 2a_1\bar{z} - a_2\bar{z}^2, \quad a_1 = \frac{1}{1+k}, \quad a_2 = \frac{1-\bar{k}}{1+k}, \quad \bar{k} = \frac{k_m}{k_0}. \quad (50)$$

откуда, воспользовавшись (38), находим безразмерное время ( $\tau = Rt / mnR_d$ ) для определения глубины опускания фронта загрязнения,  $\bar{z}$ , изначально находящегося на глубине  $\bar{z}_0$ ,

$$\tau = \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{1 - T_z / T_m} = \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{1 - 2a_1\bar{z} + a_2\bar{z}^2}. \quad (51)$$

Интегрируя (51), получаем

$$\tau = \frac{1 + \bar{k}}{\bar{k}} \left\{ \operatorname{arctanh} \frac{1 - (1 - \bar{k})\bar{z}}{\bar{k}} - \operatorname{arctanh} \frac{1 - (1 - \bar{k})\bar{z}_0}{\bar{k}} \right\}. \quad (52)$$

Из уравнения линии тока, берущей начало в точке  $x_{s1}(z_0)$  на плоскости источника (рис. 1), можно получить координату  $z_{L1}$  в сечении  $x = L$ , характеризующей время  $\tau_1$  прихода первых порций загрязнения:

$$\bar{z}_{L1} = \bar{z}_L(\tau_1) = \frac{1 - \sqrt{1 - (1 - \bar{k}^2)A_1}}{1 - \bar{k}}, \quad (53)$$

$$A_1 = 1 - \frac{x_{s1} + q_0 / R}{L + q_0 / R} (1 - 2a_1\bar{z}_0 + a_2\bar{z}_0^2). \quad (54)$$

Аналогично определяется время для противоположной границы источника,  $x_{s2}(z_0)$ : в формуле для  $A_1$   $x_{s1}$  заменяется на  $x_{s2}$ .

Для гиперболического арктангенса существует логарифмическое представление

$$\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}. \quad (55)$$

Это позволяет записать выражение для безразмерного времени в форме

$$\tau = \frac{1 + \bar{k}}{2\bar{k}} \ln \frac{(1 - \bar{z}_0)(\bar{z} - 1/a_2)}{(1 - \bar{z})(\bar{z}_0 - 1/a_2)}. \quad (56)$$

Дальнейшие преобразования приводят к явной форме выражения координаты  $\bar{z}_L$  от времени

$$\bar{z}_L(\tau) = \frac{a_2 - d(\tau)}{a_2(1 - d(\tau))}, \quad (57)$$

$$d(\tau) = s(\bar{z}_0) \exp\left(-\frac{2\bar{k}}{1 + \bar{k}} \tau\right), \quad s(\bar{z}_0) = \frac{a_2(1 - \bar{z}_0)}{1 - a_2\bar{z}_0}. \quad (57a)$$

Выполненные преобразования позволяют представить решения для концентрационной функции для двух основных форм входного сигнала.

При поддержании постоянной концентрации  $C_0$  на контуре  $x_{s1} - x_{s2}$  средняя концентрация в выходном сечении потока  $x = L$  определяется функцией кумулятивного распределения времени  $F(\tau)$  (14). Основываясь на отношении (50), мы вправе записать

$$\frac{C(\tau)}{C_0} = F(\tau) = [2a_1\bar{z}_L(\tau) - a_2\bar{z}_L^2(\tau)] - [2a_1\bar{z}_L(\tau_1) - a_2\bar{z}_L^2(\tau_1)] \exp(-\bar{\lambda}\tau), \quad \tau_1 \leq \tau < \tau_2. \quad (58a)$$

$$\frac{C(\tau)}{C_0} = [2a_1\bar{z}_L(\tau_2) - a_2\bar{z}_L^2(\tau_2)] - [2a_1\bar{z}_L(\tau_1) - a_2\bar{z}_L^2(\tau_1)] \exp(-\bar{\lambda}\tau), \quad \tau \geq \tau_2. \quad (58b)$$

Дифференцирование решения (58а), согласно (45), позволяет получить решение для импульсной входной функции:

$$C(\tau) = \frac{PR}{mnR_z R_d} F'(\tau) \exp(-\bar{\lambda}\tau), \tau_1 \leq \tau < \tau_2, \quad (59)$$

$$C(\tau) = 0, \quad \tau \geq \tau_2 .$$

Применительно к рассматриваемой задаче, дифференцируя  $F(\tau)$  (58а) по безразмерному времени  $\tau$ , получаем

$$F'(\tau) = \frac{dF(\tau)}{d\tau} = \frac{2(1-a_2)by}{a_2(1-y)^3} (a_1(1-y) - (a_2 - y)), \quad (60)$$

где  $y = s(\bar{z}_0) \exp(-b\tau)$ ,  $b = 2\bar{k} / (1 + \bar{k})$ ,  $R_z = R(1 - T_z / T_m)$ .

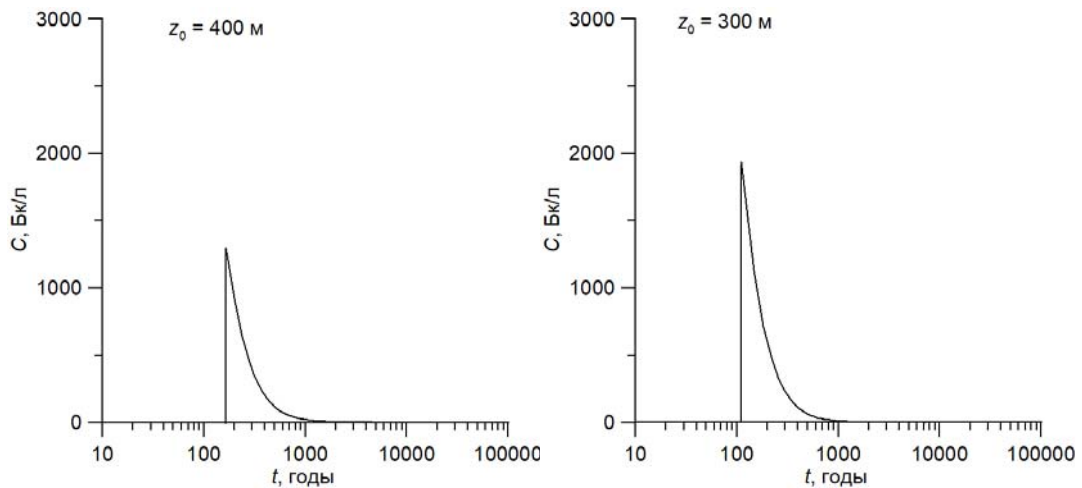
При  $\bar{k} \rightarrow 1$

$$F'(\tau) = (1 - \bar{z}_0) \exp(-\tau), \quad (60a)$$

что отвечает (25).

#### 1.4.4.2. Пример

Воспользуемся исходными данными для примера из разд. 4.3.2, где рассчитывались последствия высвобождения радиоактивных вод из источника, расположенного в массиве кристаллических трещиноватых пород для трех вариантов размещения источника на различных глубинах  $z_0$  от поверхности (табл. 3). При принятой константе затухания проницаемости  $A = 0.015$  1/м в экспоненциальной зависимости (33) и мощности толщи  $m = 600$  м суммарная проводимость  $T_m = 4.66$  м<sup>2</sup>/сут. Этому значению проводимости отвечает коэффициент  $k_0$  в модели с линейным затуханием проницаемости (47), равным 0.015 м/сут (полагалось  $k_m = 0$ ). Графики решения  $C(t)$  при ранее приведенных параметрах толщи представлены на рис. 7.



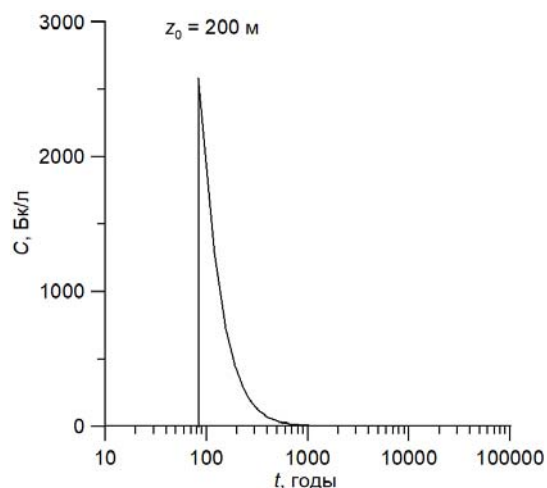


Рис. 7. Кривые  $C(t)$  по данным разд. 4.3.2 для модели линейного падения проницаемости.  $z_0$  – от кровли пласта.

Результаты расчетов существенно различаются от ранее приведенных на рис. 6, что указывает на необходимость внимательного изучения профиля проницаемости при обосновании долговременной безопасности такого рода объектов в трещиноватых массивах.

## Литература

- Bear J. 1972. Dynamics of Fluids in Porous Media. American Elsevier Publishing Company, New York.
- Chesnaux R., Molson J.W., Chapuis R.P. 2005. An analytical solution for ground water transit time through unconfined aquifers. *Ground Water*. 43(4), 511–517. <https://doi.org/10.1111/j.1745-6584.2005.0056.x>.
- Fetter C.W. 1994. Applied Hydrogeology. 3rd Edition, Macmillan College Publishing Company, New York.
- Haitjema H.M. 1995. On the residence time distribution in idealized groundwatersheds. *Journal of Hydrology*, 172(1), 127–146, doi:10.1016/0022-1694(95)02732-5.
- Jiang X.-W., Wang X.-S., Wan L., Ge S., 2011. An analytical study on stagnation points in nested flow systems in basins with depth-decaying hydraulic conductivity. *Water Resour. Res.*, 47, W01512. <https://doi.org/10.1029/2010wr009346>.
- Luther K.H., Haitjema H.M. 1998. Numerical experiments on the residence time distributions of heterogeneous groundwatersheds. *J. Hydrol.* 207, 1–17.
- Maloszewski P., 2000. Lumped-parameter models as a tool for determining the hydrological parameters of some groundwater systems based on isotope data. *Tracers and Modelling in Hydrogeology (Proceedings of the TraM'2000 Conference held at Liège, Belgium, May 2000)*. IAHS Publ. no. 262.
- McDonald M.G., Harbaugh A.W. 1988. A modular three-dimensional finite-difference groundwater flow model. U.S. Geological Survey, Techniques of Water-Resources Investigations, Book 6, Chapter A1. Washington, D.C.: United States Government Printing Office.



- Rathore S.S., Zhao Y., Lu C., Luo J. 2018. Defining the effect of stratification in coastal aquifers using a new parameter. *Water Resour. Research.* 54, 5948–5957. <https://doi.org/10.1029/2018WR023114>.
- Rumynin V.G., Sindalovskiy L.N., Nikulenkov A.M., Leskova P.G. 2020. Effect of anisotropy and depth-dependent hydraulic conductivity on concentration curve response to nonpoint-source pollution. *Journal of Hydrology.* vol. 591.
- Rumynin V.G. 2011. *Subsurface Solute Transport Models and Case Histories.* Dordrecht: Springer.
- Strack O.D.L. 2017b. Vertically integrated flow in stratified aquifers. *J. Hydrol.* 548, 794–800. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jhydrol.2017.01.039>.
- Strack O.D.L. 2017a. *Analytical Groundwater Mechanics.* Cambridge Core. doi:10.1017/9781316563144.
- Youngs E.G. 1990. An examination of computed steady-state water-table heights in unconfined aquifers: Dupuit-Forchheimer estimates and exact analytical results. *J. Hydrol.* 119, 201–214.
- Румынин В.Г. 2020. Теория и методы изучения загрязнения подземных вод. Учебник для вузов. Наука.