Конвективный перенос в профильно-неоднородном пласте при площадной инфильтрации

проф. Румынин В.Г.

Миграционный процесс рассматривается в стационарном фильтрационном потоке подземных вод, для которого в декартовой системе координат справедливо уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0\,, \tag{1}$$

– дифференциальная форма представления закона сохранения массы в механике сплошных сред; здесь v_x и v_z – горизонтальная и вертикальная компоненты скорости фильтрации (Дарси). Уравнение (1) рассматривается совместно с уравнением баланса вещества:

$$nR_d\,\frac{\partial C}{\partial t} + v_x\,\frac{\partial C}{\partial x} + v_z\,\frac{\partial C}{\partial z} = 0\,, \tag{2}$$

где C – концентрация вещества в единице объема раствора [ML^{-3}], n – пористость (трещиноватость), R_d – фактор сорбционного распределения.

Уравнение (2) является линейным однородным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка относительно концентрационной функции C с тремя независимыми переменными. Существует несколько способов решения уравнения (2), среди которых предпочтение отдается методу характеристик. Достаточно удобным и наглядным является метод, основанный на предварительном нахождении решений вспомогательных уравнений. Известно, что уравнению в частных производных (2) соответствует система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u_x} = \frac{dz}{u_z}\ , \tag{3}$$

которая в данном контексте дополняет уравнение неразрывности (1) и может быть представлена в виде двух независимых уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = u_x\,,\quad \frac{dz}{dt} = u_z\,; \tag{4}$$

здесь $u_x = v_x / nR_d$ и $u_z = v_z / nR_d$ – компоненты действительной скорости миграции сорбируемого компонента, каждая из которых в общем случае является функцией двух пространственных координат.

1. Напорный водоносный горизонт

Рассмотрим источник загрязнения подземных вод в форме пластины, расположенный в полуограниченном напорном водоносном горизонте, расход потока в котором определяется инфильтрацией атмосферных вод и фильтрационным потоком на входной границе $x = 0$ (рис. 1). Дисперсионным рассеянием вещества будем пренебрегать. В фильтрационном отношении горизонт является профильно-неоднородным, т.е. характеризуется изменчивостью коэффициента фильтрации по глубине $k = k(z)$. Это может быть, как слоистая толща осадочного генезиса, так и массив трещиноватых пород, проницаемость которых, как правило, падает с глубиной.

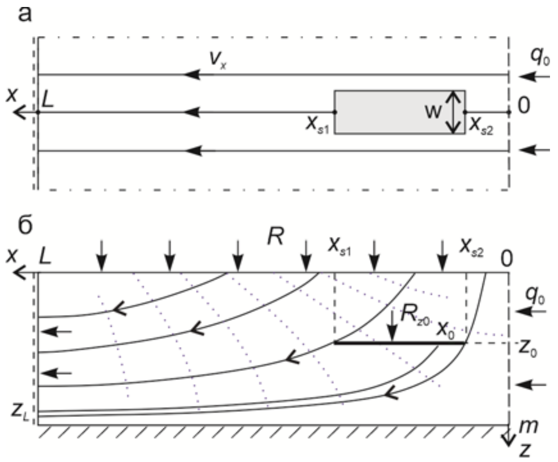


Рис. 1. Концептуальная модель структуры потока в плане (а) и разрезе (б).

1.1. Поле скоростей фильтрации и структура потока

Удельный расход фильтрационного потока в полуограниченном пласте (рис. 1) определяется выражением

$$q = q_0 + Rx = -T_m \frac{d\,h}{d\,x}, \;\; T_m = \int_0^m k(z)dz\,, \tag{5}$$

что справедливо, когда гидравлический градиент потока не зависит от вертикальной координаты z – предпосылка Дюпюи–Форхгеймера; R – удельный инфильтрационный поток на кровлю горизонта (инфильтрация); q_0 – естественный поток при x = 0; T_m – суммарная проводимость; здесь $h = h(x)$ – гидродинамический напор.

Из последнего равенства получаем выражение для горизонтальной скорости фильтрации

$$v_x = -k(z)\frac{d\,h}{d\,x} = Rk(z)\frac{x + q_0 / R}{T_m}\,. \tag{6}$$

В результате интегрирования уравнения неразрывности (1) при $v_z\big|_{z=0} = R$ получаем

$$v_z - R = -\int_0^z \frac{\partial\,v_x}{\partial\,x}dz\,, \tag{7а}$$

или

$$v_z = R_z = R\left(1 - \frac{T_z}{T_m}\right), \;\; T_z = \int_0^z k(z)dz\,. \tag{7б}$$

Представленных соотношений (имеющих в гидрогеологии фундаментальный характер), дополненных кинематическим равенством (разд. 2), оказывается достаточным для решения миграционной задачи; T_z – проводимость в интервале [0, z].

Координаты траекторий движения частиц вещества в слоистом пласте определяются решением системы (4). Поделив друг на друга ее правые и левые части, получаем уравнение

$$\frac{v_z}{v_x} = \frac{dz}{dx}\,, \tag{8}$$

или, с учетом выражений (6) и (7) для скоростей v_x и v_z,

$$\frac{k(z)dz}{T_m - T_z} = \frac{dx}{x + q_0 / R} . \tag{9}$$

или, с учетом тождества $k(z)dz = dT_z$,

$$\frac{dT_z}{T_m - T_z} = \frac{dx}{x + q_0 / R} . \tag{10}$$

Интегрирование (10) в интервалах $[T_0, T_z]$ и $[x_0, x]$ дает соотношение для определения характеристики $z = f(x)$ – координаты линии тока, берущей начало на плоскости источника в точке $x_0(z_0)$:

$$\frac{x_0 + q_0 / R}{x + q_0 / R} = \frac{T_m - T_z}{T_m - T_{z0}} , \tag{11}$$

здесь

$$T_z = \int_0^z k(z)dz , \; T_0 = \int_0^{z_0} k(z)dz , \tag{11a}$$

т.е. искомая координата z является верхним пределом интеграла T_z (11а). Как видно, траектории движения частиц не зависят от величины инфильтрационного потока.

1.2. Основное кинематическое равенство

Зависимость для характеристики $t(z)$ – времени нахождения частицы, имеющей текущую координату z, в пласте определяется интегрированием второго из системы кинематических уравнений (4):

$$\int_0^t dt = nR_d \int_{z_0}^z \frac{dz}{v_z} , \tag{12}$$

Учитывая (7б), приходит к равенству

$$t = \frac{nR_d}{R} \int_{z_0}^z \frac{dz}{1 - T_z / T_m} . \tag{13}$$

1.3. Концентрационные распределения

Представленные здесь расчетные зависимости строятся применительно к условиям миграции сорбированного компонента, подверженному радиоактивному распаду, протекающему как в водоносной толще, так и в источнике загрязнения.

1.3.1. Источник загрязнения как функция концентрации

При поддержании постоянной концентрации C_0 на контуре $x_{s1} - x_{s2}$, средняя относительная концентрация в выходном сечении потока $x = L$ определяется проводимостью участка разгрузки фильтрационного потока в пределах ленты тока $x_{s1}(t_1) - x_0(t)$, отнесенной к суммарной проводимости пласта,

$$\frac{C(t)}{C_0} = F(t) = \frac{T_L(t) - T_L(t_1)}{T_m}, \quad t_1 \le t < t_2 . \tag{14а}$$

$$\frac{C(t)}{C_0} = \frac{T_L(t_2) - T_L(t_1)}{T_m}, \quad t \ge t_2 . \tag{14б}$$

здесь t_1 и t_2 – время миграции растворенного вещества от границ источника; t – текущее время для точек $x_0(t)$; $T_L(t_1)$ – проводимость, в интервале $[0, z_L(x_{s1})]$, определяемом приходом вещества по линии тока x_{s1} (рис. 1) в момент t_1 по формуле (11); $T_L(t)$ – проводимость в сечении x = L в интервале $[0, z_L(t)]$;

По сути, функция $F(\tau)$, обозначенная в решении (14), – соотношение массовых потоков загрязненной воды к суммарному потоку воды в выходном сечении. $F(\tau)$ может ассоциироваться с функцией кумулятивного распределения времени (Румынин, 2020). Формула (14б) отвечает предельной величине разбавления загрязненных вод чистыми инфильтрационными водами в случае $x_{s1} > 0$.

Решение для компонента, подверженного распаду, принимает вид

$$\frac{C(t)}{C_0} = \frac{T_L(t) - T_L(t_1)}{T_m} \exp(-\lambda t), \quad t \ge t_1 . \tag{15}$$

1.3.2. Источник загрязнения как импульсная функция

Теперь рассмотрим случай, когда поступление вещества в водоносный горизонт на участке $x_{s1} - x_{s2}$ на глубине $z = z_0$ имеет импульсный характер, определяемый дельта-функцией Дирака

$$C_{in}(t) = \frac{P}{R_z} \delta(t), \tag{16}$$

где P – масса вещества на единицу площади источника загрязнения [ML^{-2}].

Одним из способов решения задачи для данного входного сигнала является использование функции плотности вероятности времени миграции частиц вещества (TTD функция – “transit time distribution”), $F'(t)$, которая связана производной с кумулятивной функцией $F(t)$ (Haitjema, 1995):

$$F'(t) = dF(t)/dt . \tag{17}$$

$F'(t)$, представляет собой интегрированное время отклика водоносного горизонта на входную единичную концентрацию (массу).

Введение $F'(t)$ позволяет представить решение для произвольной входной концентрации в форме интеграла свертки (Maloszewski and Zuber, 1982; Haitjema, 1995):

$$C(t) = \int_0^\infty C_{in}(t-\theta) F'(\theta) \exp(-\lambda\theta) d\theta, \tag{18}$$

или, с учетом (16),

$$C(\tau) = \frac{P}{R_z} \int_0^\infty \delta(t-\theta) F'(\theta) \exp(-\lambda\theta) d\theta, \tag{19}$$

что окончательно дает

$$C(t) = \frac{P}{R_z} F'(t) \exp(-\lambda t),\ t_1 \le t < t_2,$$
$$C(t) = 0, \qquad t \ge t_2\ . \tag{20}$$

Таким образом, в диапазоне $t_1 \le t < t_2$ функция TTD, умноженная на фактор скорости распада, является решением задачи. При $t \ge t_2$ вся исходная масса импульса покидает систему.

1.4. Частные случаи

1.4.1. Однородный пласт

1.4.1.1. Решение задачи

Из представленных соотношений при $k(z)$ = const легко получается уравнение линий тока

$$\frac{x_0 + q_0 / R}{x + q_0 / R} = \frac{1 - \bar{z}}{1 - \bar{z}_0},\ \bar{z} = z / m,\ \bar{z}_0 = z_0 / m\ . \tag{21}$$

Безразмерное время достижения растворенным веществом относительной глубины $\bar{z}$

$$\tau = \frac{Rt}{R_d mn} = -\ln \frac{1 - \bar{z}}{1 - \bar{z}_0}\ . \tag{22}$$

В этом случае решение задачи (14) принимает вид

$$\frac{C(\tau)}{C_0} = F(\tau) = [\exp(-\tau_1) - \exp(-\tau)](1 - \bar{z}_0),\quad \tau_1 \le \tau < \tau_2\ . \tag{23}$$

$$\frac{C(\tau)}{C_0} = [\exp(-\tau_1) - \exp(-\tau_2)](1 - \bar{z}_0),\ \tau \ge \tau_2\ , \tag{24}$$

$\tau_1 = -\ln \dfrac{x_{si} + q_0 / R}{L + q_0 / R},\ i = 1, 2\ .$

В этом случае TTD функция определяется равенством

$$F'(\tau) = \frac{dF}{d\tau} = (1 - \bar{z}_0)\exp(-\tau)\ . \tag{25}$$

А решение для импульсной функции в размерных единицах имеет вид:

$$C(t) = \frac{PR}{R_d mnR_z} \exp(-\frac{Rt}{R_d mn}) \exp(-\lambda t)(1 - \bar{z}_0),\ t_1 \le t < t_2,$$
$$C(t) = 0, \qquad t \ge t_2\ . \tag{26}$$

Поскольку $R_z = R\left(1 - \bar{z}_0\right)$, решение упрощается и принимает вид

$$C(t) = \frac{P}{R_d mn} \exp(-\frac{Rt}{R_d mn}) \exp(-\lambda t),\ t_1 \le t < t_2,$$
$$C(t) = 0, \qquad t \ge t_2\ . \tag{26a}$$

1.4.1.2. Пример

Этот пример показывает возможность обобщения решения (26а) на случай цикличного изменения входной функции P.

Рассмотрим водоносный горизонт протяженностью L = 1500 м со следующими характеристиками: $m = 10$ м, $n = 0.2$, $R = 1.3 \times 10^{-4}$ м/сут, $q_0 = 0$. На поверхности существует площадной источник загрязнения, связанный с внесением сельскохозяйственных удобрений. Координаты границ источника (расстояние до зоны разгрузки потока как на рис. 2): $x_{s1} = 500$ м, $x_{s2} = 750$ м. Удобрения содержат два типа загрязняющих компонентов: (1) химически инертный и стабильный ($R_d = 1$, $\lambda = 0$), (2) сорбируемый и нестабильный ($R_d = 2$, $\lambda = 5 \times 10^{-5}$ сут$^{-1}$). Плотность загрязнения почвы при одноразовом внесении удобрений 50 г/м^2 (довольно характерное для сельскохозяйственного производства значение). Количество годовых циклов внесения удобрений 9. Графически результаты решения задачи, полученного суперпозицией элементарных решений (26а), представлены на рис. 2. На этом же графике приведены кривые, отвечающие одномоментному внесению общей массы (50x9=450 г/м^2).

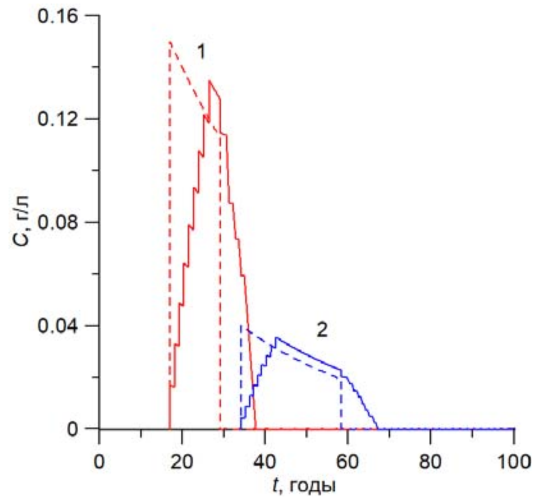


Рис. 2. Динамика изменения концентрации инертного стабильного (1) и сорбируемого распадающегося компонента (2) в выходном сечении потока. Сплошная линия – 9 циклов внесения удобрения 50 г/м^2 с периодичностью 1 год, пунктирные кривые – 1 цикл 450 г/м^2.

Как видно, в рассматриваемом временном масштабе для региональных оценок оказывается допустимой операция суммирования массы удобрений при их циклическом внесении в почвы.

1.4.2. Слоистый пласт

1.4.2.1. Решение задачи

При представлении напорного пласта в виде идеализированной слоистой системы (рис. 3), где каждый из i-х слоев имеет мощность m_i и коэффициент фильтрации k_i , формула (11) для траектории движения частиц может быть переписана в конечно-разностном виде (нумерация слоев сверху вниз):

$$\frac{x_0 + q_0 / R}{x_i + q_0 / R} = \frac{T_m - T_z^i}{T_m - T_{z0}}, \tag{27}$$

$$T_z^i = T_{z0} + \sum_{j=1}^{i} k_j m_j \ , \ T_z^i > T_{z0} \, , \tag{27a}$$

где x_i – расстояние до точки пересечения линии тока $x_0(z_0)$ $x_{s1} \le x_0 \le x_{s2}$ с подошвой *i*-го слоя, i – номер слоя, в кровле которого расположен источник загрязнения, T_{z0} – проводимость толщи в интервале $[0, z_0]$ («накопленная» проводимость).

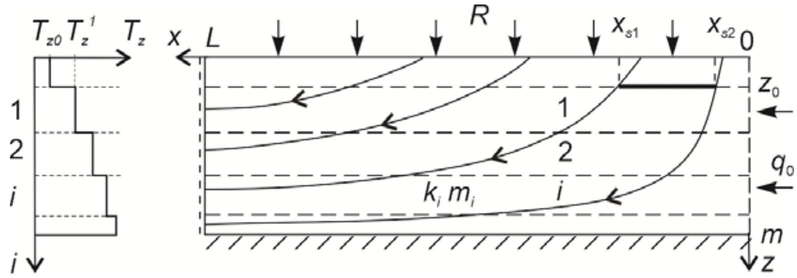


Рис. 3. Структура линий тока в слоистом пласте.

Для слоистого пласта, в котором $k(z)$ является ступенчатой функции, с учетом тождества $k(z_i)dz = dT_z$, формулу (13) можно представить в виде

$$t = \frac{R_d}{R} \int_{z_{i0}}^{z_N} \frac{n T_m dT_z}{k(z_i)(T_m - T_z)}, \tag{28}$$

где z_{i0} – глубина размещения источника в кровле $i = i_0$ слоя, z_N –глубина до подошвы расчетного слоя $i = N$.

Интегрирование в выражении (28) может быть заменено действием суммирования:

$$t_{N-1} = -\frac{1}{R} \sum_{1}^{N-1} \frac{R_{di} n_i T_m}{k_i} \ln \frac{T_m - T_z^i}{T_m - T_z^{i-1}}, \tag{29}$$

$$t = t_{N-1} - \frac{R_{dN}}{R} \frac{n_N T_m}{k_N} \ln \frac{T_m - T_z}{T_m - T_z^{N-1}},$$

где N – номер слоя, в котором линия тока пересекает сечение $x = L$, t_{N-1} – время пересечения линией тока подошвы N-1 слоя. Проводимость пласта в сечении $x = L$ для произвольной линии тока $x = x_0(z_0)$, определяется формулой (27), откуда

$$T_L(t) \equiv T_z = T_m - \frac{x_0(t) + q_0 / R}{L + q_0 / R} (T_m - T_{z0}) \, . \tag{30}$$

Средняя концентрация в сечении $x = L$ для случая поддержании постоянной концентрации C_0 на контуре $x_{s1} - x_{s2}$ определяется решением (14).

Формула (29) записана для случая, когда изменение пористости (трещиноватости) также, как и коэффициента фильтрации, может быть аппроксимировано ступенчатой функцией.

При поддержании постоянной концентрации C_0 на контуре $x_{s1} - x_{s2}$ средняя концентрация в выходном сечении потока $x = L$ определяется функцией кумулятивного распределения времени $F(t)$ (14, а, б) и (15)

Решение для импульсного источника имеет вид (20). Используя представление (14а) для TTD функции, $F'(t)$, оно может быть представлено следующим образом:

$$\begin{aligned} &C(t) = \frac{P}{T_m R_z} \frac{dT_L(t)}{dt} \exp(-\lambda t),\ t_1 \le t \le t_2, \\ &C(t) = 0, \qquad\qquad\qquad\qquad t > t_2, \end{aligned} \tag{31}$$

где $R_z = R\left(1 - T_{z0} / T_m\right)$. Производная в этом решении определяется посредством численного дифференцирования функции $T_L(t)$.

При постоянных n и R_d в относительных величинах

$$\begin{aligned} &\bar{C}(\tau) = \frac{mnR_d}{P} C,\ \tau_1 \le \tau < \tau_2, \\ &\bar{C}(\tau) = 0, \qquad\qquad \tau > \tau_2, \end{aligned} \tag{32}$$

где $\tau = Rt / mnR_d$.

1.4.2.2. Пример

Рассмотрим напорный водоносный горизонт с параметрами, определенными в табл. 1 Он представлен шестью слоями (табл. 1), распределение проницаемости между которыми отвечают трем расчетным вариантам: (1) однородный горизонт, (2) горизонт с высокопроницаемым третьим в верхней части разреза, (3) горизонт с шестым высокопроницаемым слоем на подошве пласта. Во всех вариантах суммарная проводимость одинаковая, T_m = 240 м^2/сут.

Таблица 1

L	x_{s1}	x_{s2}	z_0	m	n	R_d	C_0	P	R	q_0
м	м	м	м	м	–	–	кг/м^3	кг/м^2	м/сут	м^2/сут
3000	1500	500	5	25	0.1	1	1	1000	0.0001	0

Таблица 2

Слой	Мощность, м	k, м/сут		
		Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
1	5	8	6.33	6.33
2	5	8	6.33	6.33
3	5	8	50	6.33
4	5	8	6.33	6.33
5	5	8	6.33	6.33
6	5	8	6.33	50

Результаты расчетов отражены на рис. 4. На графике видно, что положение высокопроницаемого слоя определяет время прихода вещества в расчетное сечение. Абсолютные значения слабо зависят от профиля проницаемости.

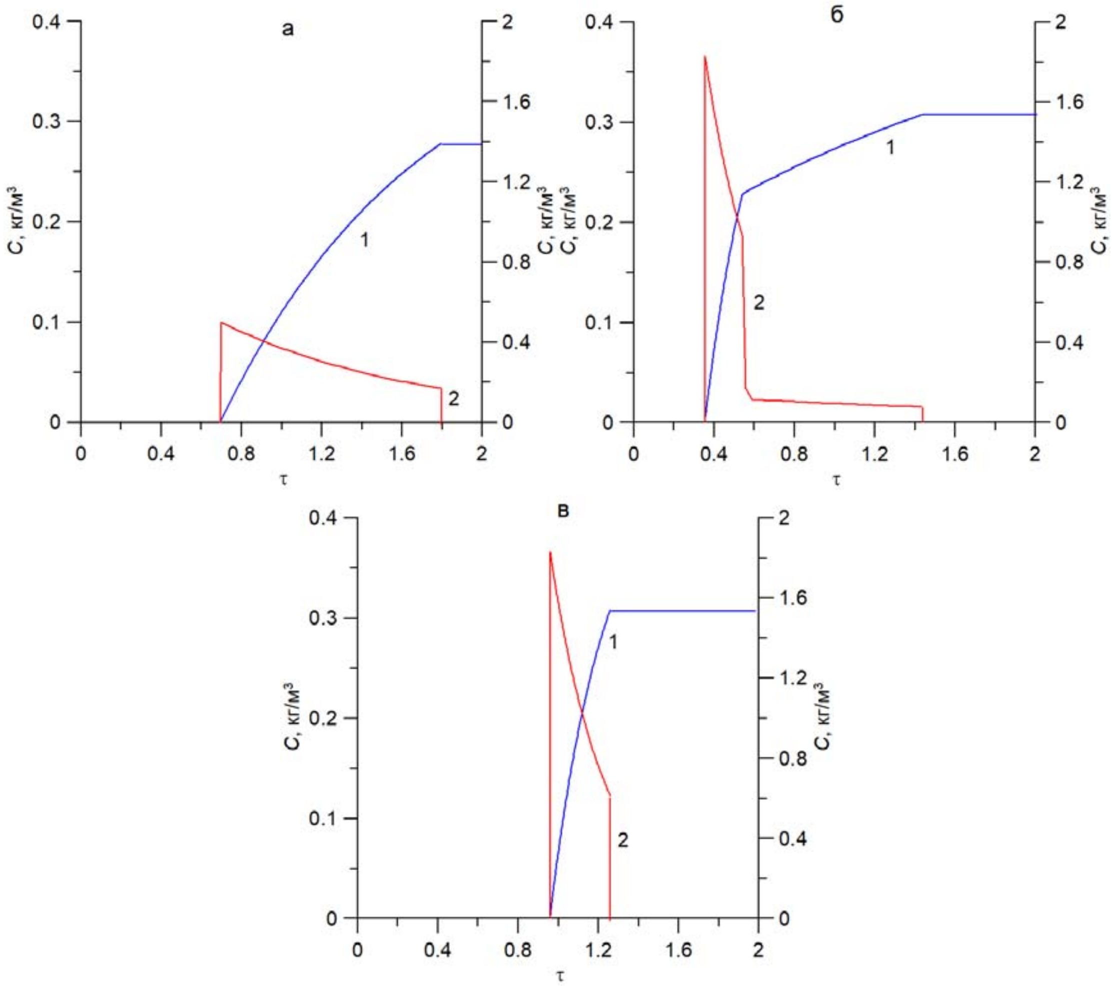


Рис. 4. Графики средней концентрации вещества в расчетном сечении $x = L = 3000$ м. а, б, в – расчетные варианты 1, 2, 3. Цифры на графиках: 1 – постоянная концентрация в источники C_0= 1 кг/м^3; 2 – импульс с плотностью P = 1000 кг/м^2. Шкала слева – для условий постоянной концентрация, справа – для импульсного ГУ. $\tau = Rt / mnR_d$.

1.4.3. Пласт с экспоненциально-затухающей по глубине проницаемостью

1.4.3.1. Решение задачи

Решение уравнения (11) может быть представлено и в замкнутом аналитическом виде при представлении $k(z)$ в форме аналитической функции, описывающей изменение проницаемости по глубине. При последующем решении миграционной задачи нас будет интересовать точка z_L, характеризующая проводимость пласта $T_m - T_{zL}$ в интервале [z_L, m] в выходном сечении фильтрационного потока (зоны разгрузки) $x = L$ (рис. 1).

Например, для случая затухания проницаемости массива с глубиной по экспоненциальному закону (Jiang et al., 2011),

$$k(z) = k_0 \exp(-Az), \text{ или } k(\bar{z}) = k_0 \exp(-\alpha \bar{z}), \ \alpha = Am, \qquad (33)$$

получаем:

$$T_m = \frac{k_0 m}{\alpha}(1 - e^{-\alpha}), \ T_{z0} = \frac{k_0 m}{\alpha}(1 - e^{-\alpha \bar{z}_0}), \ T_{zL} = \frac{k_0 m}{\alpha}(1 - e^{-\alpha \bar{z}_L}), \qquad (34)$$

где A – коэффициент «затухания» (1/м).

Тогда уравнение линии тока (11) принимает вид:

$$\frac{x_0 + q_0 / R}{L + q_0 / R} = \frac{e^{-\alpha \bar{z}_L} - e^{-\alpha}}{e^{-\alpha \bar{z}_0} - e^{-\alpha}}, \; \bar{z}_L = z_L / m, \; \bar{z}_0 = z_0 / m. \tag{35}$$

Отсюда экспоненциальный член в выражении для T_{zL} имеет представление

$$e^{-\alpha \bar{z}_L} = \left[\frac{x_0 + q_0 / R}{L + q_0 / R} (e^{-\alpha \bar{z}_0} - e^{-\alpha}) + e^{-\alpha} \right], \tag{36}$$

и далее

$$T_m - T_{zL} = \frac{k_0 m}{\alpha} (e^{-\alpha \bar{z}_0} - e^{-\alpha}). \tag{37}$$

После несложных операций приходим к интегральному выражению для безразмерного времени

$$\tau = \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{1 - T_z / T_m}, \tag{38}$$

где $\tau = Rt / mnR_d$.

Интегрирование (38) при соотношении проводимостей, определяемых из (34) (пласт с экспоненциально затухающей проницаемостью), дает

$$\tau = \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha e^{-\alpha}} \ln \frac{(e^{-\alpha \bar{z}_0} - e^{-\alpha}) e^{-\alpha \bar{z}_L}}{(e^{-\alpha \bar{z}_L} - e^{-\alpha}) e^{-\alpha \bar{z}_0}} \; - \tag{39}$$

– безразмерное время прибывания компонента в интервале $[\bar{z}_0, \bar{z}_L]$. Координата $\bar{z}_L$ для произвольной точки x_0, определяется выражением (36), что дает $\tau(x_0)$. Соответственно для граничных точек $x_{s1}(z_0)$ и $x_{s2}(z_0)$ (рис. 1) имеем τ_1 и τ_2.

При поддержании постоянной концентрации C_0 на контуре $x_{s1} - x_{s2}$ средняя концентрация в выходном сечении потока $x = L$ определяется функцией кумулятивного распределения времени $F(\tau)$ (14), или для безразмерного времени

$$\frac{C(\tau)}{C_0} = F(\tau) = \frac{T_L(\tau) - T_L(\tau_1)}{T_m}, \; \tau_1 \le \tau < \tau_2. \tag{40а}$$

$$\frac{C(\tau)}{C_0} = \frac{T_L(\tau_2) - T_L(\tau_1)}{T_m}, \; \tau \ge \tau_2. \tag{40б}$$

В таком представлении $T_L(\tau)$ – проводимость в сечении $x = L$ в интервале $[0, z_L(\tau)]$; $T_L(\tau_1)$ – проводимость, в интервале $[0, z_L(x_{s1})]$, определяемом приходом вещества по линии тока x_{s1} (рис. 1) в момент τ_1.

Основываясь на ранее представленных соотношениях, характеристика в решении для пласта с экспоненциально затухающей проницаемостью (33) может быть представлена в явном виде

$$T_L(\tau) = T_L(\tau) = \frac{k_0 m}{\alpha} [1 - e_L(\tau)], \tag{41}$$

$$e_L(\tau) = \frac{e^h s_1 s_2}{s_2 [e^h - 1] + s_1}, \tag{41а}$$

$$h = \alpha \tau s_1 / (1 - s_1), \; s_1 = e^{-\alpha}, \; s_2 = e^{-\alpha \bar{z}_0}. \tag{41б}$$

Решение для компонента, подверженного распаду, принимает вид

$$\frac{C(\tau)}{C_0} = F(\tau) = \frac{T_L(\tau) - T_L(\tau_1)}{T_m} \exp(-\bar{\lambda}\tau), \quad \tau_1 \le \tau < \tau_2. \tag{42}$$

$$\frac{C(\tau)}{C_0} = F(\tau) = \frac{T_L(\tau_2) - T_L(\tau_1)}{T_m} \exp(-\bar{\lambda}\tau), \quad \tau \ge \tau_2. \tag{42a}$$

где $\bar{\lambda} = \lambda mnR_d / R$.

Если поступление имеет импульсный характер, то для безразмерного времени (τ) граничное условие (16) может быть переписано в виде

$$C_{in}(\tau) = \frac{PR}{mnR_z R_d} \delta(\tau). \tag{43}$$

Введение $F'(\tau) = dF(\tau)/d\tau$ позволяет представить решение задачи (18) в виде

$$C(\tau) = \frac{PR}{mnR_z R_d} \int_0^\infty \delta(\tau - \sigma) F'(\sigma) \exp(-\bar{\lambda}\sigma) d\sigma, \tag{44}$$

что окончательно дает

$$\begin{aligned} C(\tau) &= \frac{PR}{mnR_z R_d} F'(\tau) \exp(-\bar{\lambda}\tau), && \tau_1 \le \tau < \tau_2, \\ C(\tau) &= 0, && \tau \ge \tau_2. \end{aligned} \tag{45}$$

Таким образом, в диапазоне $\tau_1 \le \tau < \tau_2$ функция TTD, умноженная на фактор скорости распада, является решением задачи. При $\tau \ge \tau_2$ вся исходная масса импульса покидает систему.

Применительно к рассматриваемой задаче, дифференцируя $F(\tau)$ (42) по безразмерному времени τ, получаем

$$F'(\tau) = \frac{dF(\tau)}{d\tau} = -\frac{k_0 m s_1^2 s_2 e^h (s_1 - s_2)}{T_m (1 - s_1)(s_1 - s_2 + s_2 e^h)^2}, \tag{46}$$

где $h = \dfrac{\alpha\tau s_1}{1 - s_1}$, $s_1 = e^{-\alpha}$, $s_2 = e^{-\alpha \bar{z}_0}$. При $\alpha \to 0$

$$F'(\tau) = (1 - \bar{z}_0) \exp(-\tau) \tag{46a}$$

– однородный пласт (см. формулу 25).

1.4.3.2. Пример

В данном примере рассчитываются последствия высвобождения радиоактивных вод из источника, расположенного в массиве кристаллических трещиноватых пород, причем рассматриваются три варианта размещения источника на различных глубинах z_0 от поверхности (табл. 3).

Таблица. 3. Геометрия области и расположение источника

Модельная область			Источник			
L	m		x_{s1}	x_{s2}	z_{0i}	S(700×300m)
м	м		м	м	м	м^2
4500	600		3800	4500	200; 300; 400	210000

Предполагается, что проницаемость массива уменьшается с глубиной по экспоненциальному закону (33). Параметры, контролирующие такой профиль проницаемости, а также трещиноватость и величина инфильтрационного питания приведены в табл. 2.

Таблица 4. Характеристики массива, его инфильтрационного питания и источника загрязнения

k_{x0}	A	n	R_d	λ	R	M	P	C_0
м/сут	1/м	–	–	год$^{-1}$	м/год	Бк	Бк/м^2	Вк/м^3
0.07	0.015	0.003	1	10^{-5}	0.05	1.2E+13	5.70E+07	5.70E+07

Рассматриваются два варианта входной концентрационной функции (табл. 4): а) заданная концентрация $C_0(t) = C_0 \exp(-\lambda t)$; б) импульсное поступление всей активности M, накопленной в источнике, в массив, что определяет удельную плотность загрязнения $P = M / S$. Величина C_0 (Бк/м^3) условно принята равной по абсолютному значению характеристике P (Бк/м^2). Теоретически это возможно, если на единицу площади источника приходится 1 м толщины слоя воды, в которой растворяется радиоактивное вещество, накопившееся в источнике.

Результаты расчетов представлены в виде графиков на рис. 5 и рис. 6.

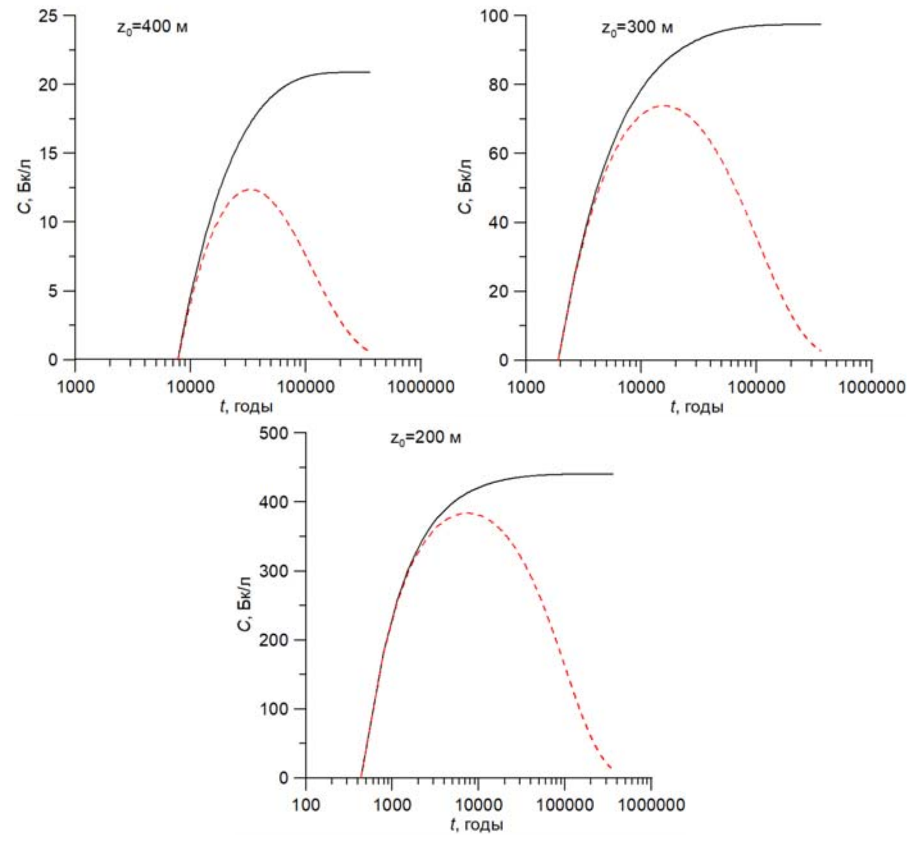


Рис. 5. Графики решения (42). Сплошные кривые – $\lambda = 0$, пунктирные – $\lambda = 10^{-5}$ год$^{-1}$.

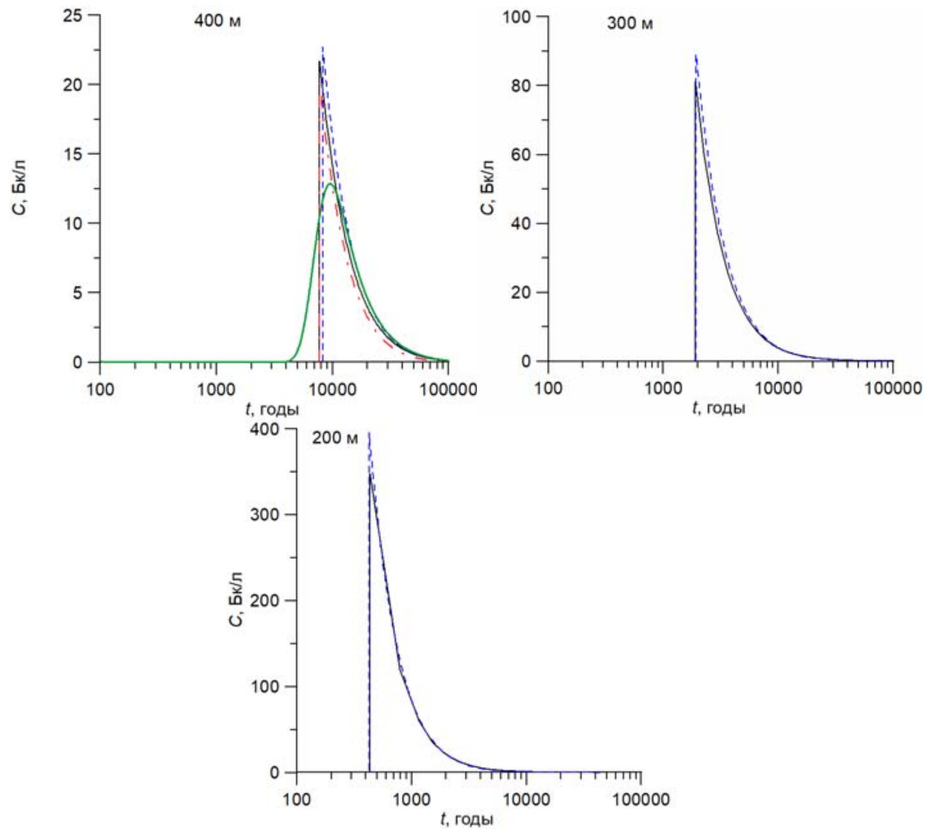


Рис. 6. Графики решения (45). Сплошные кривые – приближенное решение (45) при $\lambda = 0$, штрих-пунктир – решение (45) при $\lambda = 10^{-5}$ год$^{-1}$; пунктирные кривые – аналитическое решение 2D задачи в строгой постановке (Rumynin et al., 2020), зеленая кривая на панели z_0 = 400 м – численное решение (code Gera).

1.4.4. Пласт с линейно-затухающей по глубине проницаемостью

1.4.4.1. Решение задачи

Пусть падение проницаемости массива с глубиной происходит по линейному закону,

$$k(z) = k_0 - \frac{k_0 - k_m}{m} z \text{, или } k(\bar{z}) = k_0 - (k_0 - k_m)\bar{z}\,,\ \bar{z} = z/m\,, \tag{47}$$

где k_0 и k_m – коэффициенты фильтрации пород вблизи кровли (z = 0) и подошвы (z = m) водоносного горизонта.

Тогда для определения проводимостей получаем следующее соотношения:

$$T_m = \frac{k_0 + k_m}{2} m\,,\ T_z = k_0 z - \frac{k_0 - k_m}{2m} z^2\,,\ T_{z0} = k_0 z_0 - \frac{k_0 - k_m}{2m} z_0^2\,,. \tag{48}$$

Соответственно, уравнение линии тока (11) принимает вид:

$$\frac{x_0 + q_0/R}{x + q_0/R} = \frac{1 - 2a_1\bar{z} + a_2\bar{z}^2}{1 - 2a_1\bar{z}_0 + a_2\bar{z}_0^2}\,,\ \bar{z}_0 = z_0/m\,. \tag{49}$$

Отношение проводимостей

$$\frac{T_z}{T_m} = 2a_1\bar{z} - a_2\bar{z}^2\,,\ a_1 = \frac{1}{1+\bar{k}}\,,\ a_2 = \frac{1-\bar{k}}{1+\bar{k}}\,,\ \bar{k} = \frac{k_m}{k_0}\,. \tag{50}$$

откуда, воспользовавшись (38), находим безразмерное время ($\tau = Rt / mnR_d$) для определения глубины опускания фронта загрязнения, $\bar{z}$, изначально находящегося на глубине $\bar{z}_0$,

$$\tau = \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{1 - T_z / T_m} = \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{1 - 2a_1\bar{z} + a_2\bar{z}^2} . \tag{51}$$

Интегрируя (51), получаем

$$\tau = \frac{1+\bar{k}}{\bar{k}} \left\{ \operatorname{arctanh} \frac{1-(1-\bar{k})\bar{z}}{\bar{k}} - \operatorname{arctanh} \frac{1-(1-\bar{k})\bar{z}_0}{\bar{k}} \right\}. \tag{52}$$

Из уравнения линии тока, берущей начало в точке $x_{s1}(z_0)$ на плоскости источника (рис. 1), можно получить координату z_{L1} в сечении x = L, характеризующей время τ_1 прихода первых порций загрязнения:

$$\bar{z}_{L1} = \bar{z}_L(\tau_1) = \frac{1 - \sqrt{1-(1-\bar{k}^2)A_1}}{1-\bar{k}} , \tag{53}$$

$$A_1 = 1 - \frac{x_{s1} + q_0 / R}{L + q_0 / R} (1 - 2a_1\bar{z}_0 + a_2\bar{z}_0^2) . \tag{54}$$

Аналогично определяется время для противоположной границы источника, $x_{s2}(z_0)$: в формуле для A_1 x_{s1} заменяется на x_{s2} .

Для гиперболического арктангенса существует логарифмическое представление

$$\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} . \tag{55}$$

Это позволяет записать выражение для безразмерного времени в форме

$$\tau = \frac{1+\bar{k}}{2\bar{k}} \ln \frac{(1-\bar{z}_0)(\bar{z} - 1/a_2)}{(1-\bar{z})(\bar{z}_0 - 1/a_2)} . \tag{56}$$

Дальнейшие преобразования приводят к явной форме выражения координаты $\bar{z}_L$ от времени

$$\bar{z}_L(\tau) = \frac{a_2 - d(\tau)}{a_2(1 - d(\tau))} , \tag{57}$$

$$d(\tau) = s(\bar{z}_0) \exp\left(-\frac{2\bar{k}}{1+\bar{k}} \tau \right), \; s(\bar{z}_0) = \frac{a_2(1-\bar{z}_0)}{1 - a_2\bar{z}_0} . \tag{57а}$$

Выполненные преобразования позволяют представить решения для концентрационной функции для двух основных форм входного сигнала.

При поддержании постоянной концентрации C_0 на контуре $x_{s1} - x_{s2}$ средняя концентрация в выходном сечении потока $x = L$ определяется функцией кумулятивного распределения времени $F(\tau)$ (14). Основываясь на отношении (50), мы вправе записать

$$\frac{C(\tau)}{C_0} = F(\tau) = [2a_1\bar{z}_L(\tau) - a_2\bar{z}_L^2(\tau)] - [2a_1\bar{z}_L(\tau_1) - a_2\bar{z}_L^2(\tau_1)] \exp(-\bar{\lambda}\tau) , \quad \tau_1 \le \tau < \tau_2 . \tag{58а}$$

$$\frac{C(\tau)}{C_0} = [2a_1\bar{z}_L(\tau_2) - a_2\bar{z}_L^2(\tau_2)] - [2a_1\bar{z}_L(\tau_1) - a_2\bar{z}_L^2(\tau_1)] \exp(-\bar{\lambda}\tau) , \; \tau \ge \tau_2 . \tag{58б}$$

Дифференцирование решения (58а), согласно (45), позволяет получить решение для импульсной входной функции:

$$C(\tau) = \frac{PR}{mnR_z R_d} F'(\tau)\exp(-\bar{\lambda}\tau),\ \tau_1 \le \tau < \tau_2,$$
$$C(\tau) = 0, \qquad \tau \ge \tau_2\ . \tag{59}$$

Применительно к рассматриваемой задаче, дифференцируя $F(\tau)$ (58а) по безразмерному времени τ, получаем

$$F'(\tau) = \frac{dF(\tau)}{d\tau} = \frac{2(1-a_2)by}{a_2(1-y)^3}(a_1(1-y)-(a_2-y)), \tag{60}$$

где $y = s(\bar{z}_0)\exp(-b\tau)$, $b = 2\bar{k}/(1+\bar{k})$, $R_z = R\left(1 - T_z / T_m\right)$.

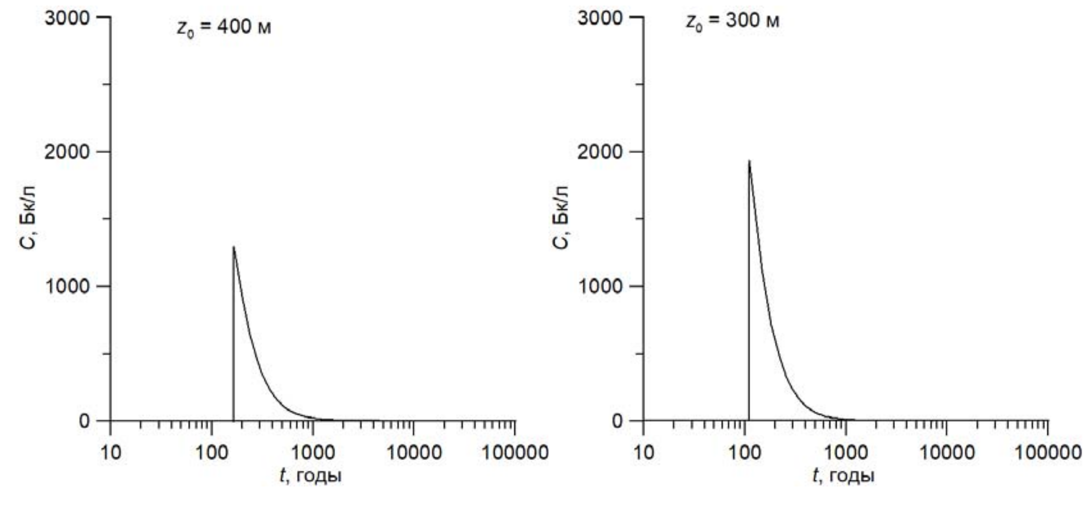
При $\bar{k} \to 1$

$$F'(\tau) = (1-\bar{z}_0)\exp(-\tau), \tag{60a}$$

что отвечает (25).

1.4.4.2. Пример

Воспользуемся исходными данными для примера из разд. 4.3.2, где рассчитывались последствия высвобождения радиоактивных вод из источника, расположенного в массиве кристаллических трещиноватых пород для трех вариантов размещения источника на различных глубинах z_0 от поверхности (табл. 3). При принятой константе затухания проницаемости A = 0.015 1/м в экспоненциальной зависимости (33) и мощности толщи m = 600 м суммарная проводимость T_m = 4.66 м^2/сут. Этому значению проводимости отвечает коэффициент k_0 в модели с линейном затуханием проницаемости (47), равным 0.015 м/сут (полагалось k_m = 0). Графики решения $C(t)$ при ранее приведенных параметрах толщи представлены на рис. 7.



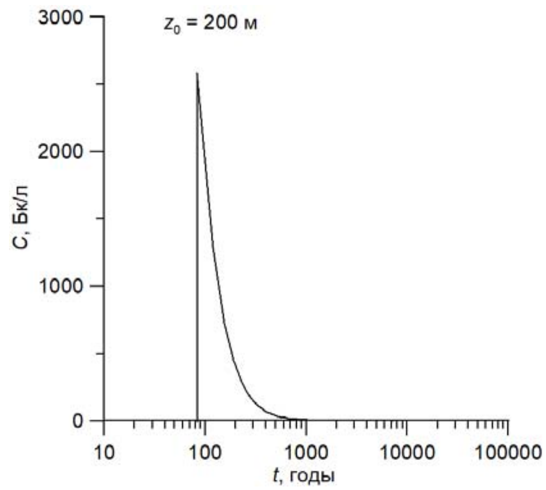


Рис. 7. Кривые $C(t)$ по данным разд. 4.3.2 для модели линейного падения проницаемости. z_0 – от кровли пласта.

Результаты расчетов существенно различаются от ранее приведенных на рис. 6, что указывает на необходимость внимательного изучения профиля проницаемости при обосновании долговременной безопасности такого рода объектов в трещиноватых массивах.

Литература

Bear J. 1972. Dynamics of Fluids in Porous Media. American Elsevier Publishing Company, New York.

Chesnaux R., Molson J.W., Chapuis R.P. 2005. An analytical solution for ground water transit time through unconfined aquifers. Ground Water. 43(4), 511–517. https://doi.org/10.1111/j.1745-6584.2005.0056.x.

Fetter C.W. 1994. Applied Hydrogeology. 3rd Edition, Macmillan College Publishing Company, New York.

Haitjema H.M. 1995. On the residence time distribution in idealized groundwatersheds. Journal of Hydrology, 172(1), 127–146, doi:10.1016/0022-1694(95)02732-5.

Jiang X.-W., Wang X.-S., Wan L., Ge S., 2011. An analytical study on stagnation points in nested flow systems in basins with depth-decaying hydraulic conductivity. Water Resour. Res., 47, W01512. https://doi.org/10.1029/2010wr009346.

Luther K.H., Haitjema H.M. 1998. Numerical experiments on the residence time distributions of heterogeneous groundwatersheds. J. Hydrol. 207, 1–17.

Maloszewski P., 2000. Lumped-parameter models as a tool for determining the hydrological parameters of some groundwater systems based on isotope data. Tracers and Modelling in Hydrogeology (Proceedings of the TraM'2000 Conference held at Liège, Belgium, May 2000). IAHS Publ. no. 262.

McDonald M.G., Harbaugh A.W. 1988. A modular three-dimensional finite-difference ground-water flow model. U.S. Geological Survey, Techniques of Water-Resources Investigations, Book 6, Chapter A1. Washington, D.C.: United States Government Printing Office.

Rathore S.S., Zhao Y., Lu C., Luo J. 2018. Defining the effect of stratification in coastal aquifers using a new parameter. Water Resour. Research. 54, 5948–5957. https://doi.org/10.1029/2018WR023114.

Rumynin V.G., Sindalovskiy L.N., Nikulenkov A.M., Leskova P.G. 2020. Effect of anisotropy and depth-dependent hydraulic conductivity on concentration curve response to nonpoint-source pollution. Journal of Hydrology. vol. 591.

Rumynin V.G. 2011. Subsurface Solute Transport Models and Case Histories. Dordrecht: Springer.

Strack O.D.L. 2017b. Vertically integrated flow in stratified aquifers. J. Hydrol. 548, 794–800. http://dx.doi.org/10.1016/j.jhydrol.2017.01.039.

Strack O.D.L. 2017a. Analytical Groundwater Mechanics. Cambridge Core. doi:10.1017/9781316563144.

Youngs E.G. 1990. An examination of computed steady-state water-table heights in unconfined aquifers: Dupuit-Forchheimer estimates and exact analytical results. J. Hydrol. 119, 201–214.

Румынин В.Г. 2020. Теория и методы изучения загрязнения подземных вод. Учебник для вузов. Наука.

Конвективный перенос в профильно-неоднородном пласте при площадной инфильтрации

проф. Румынин В.Г.

Миграционный процесс рассматривается в стационарном фильтрационном потоке подземных вод, для которого в декартовой системе координат справедливо уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

– дифференциальная форма представления закона сохранения массы в механике сплошных сред; здесь v_x и v_z – горизонтальная и вертикальная компоненты скорости фильтрации (Дарси). Уравнение (1) рассматривается совместно с уравнением баланса вещества:

$$nR_d \frac{\partial C}{\partial t} + v_x \frac{\partial C}{\partial x} + v_z \frac{\partial C}{\partial z} = 0, \tag{2}$$

где C – концентрация вещества в единице объема раствора [ML^{-3}], n – пористость (трещиноватость), R_d – фактор сорбционного распределения.

Уравнение (2) является линейным однородным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка относительно концентрационной функции C с тремя независимыми переменными. Существует несколько способов решения уравнения (2), среди которых предпочтение отдается методу характеристик. Достаточно удобным и наглядным является метод, основанный на предварительном нахождении решений вспомогательных уравнений. Известно, что уравнению в частных производных (2) соответствует система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u_x} = \frac{dz}{u_z}, \tag{3}$$

которая в данном контексте дополняет уравнение неразрывности (1) и может быть представлена в виде двух независимых уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = u_x, \quad \frac{dz}{dt} = u_z; \tag{4}$$

здесь $u_x = v_x / nR_d$ и $u_z = v_z / nR_d$ – компоненты действительной скорости миграции сорбируемого компонента, каждая из которых в общем случае является функцией двух пространственных координат.

2. Безнапорный водоносный горизонт

В отличие от напорного горизонта, кровля и подошва которого обычно контролируется геологическим границами, верхняя граница безнапорного потока подземных вод должна быть определена из решения фильтрационной задачи. Существует множество способов решения такого рода задач (Bear, 1972; Strack, 1917a,b), позволяющих с различной степенью приближения описать пьезометрическую поверхность $h = z(x)$ (рис. 7) при движении подземных вод, как в однородных и изотропных, так и неоднородных и анизотропных пластах. На некоторых из этих способов, позволяющих эффективно решать и сопряженные задачи миграции загрязнения в безнапорных потоках, мы здесь и остановимся в настоящем разделе.

2.1. Поле скоростей фильтрации и уравнение линий тока

Рассматривается «гидродинамически пассивный» (не оказывающий влияние на структуру потока) источник загрязнения подземных вод в планово-одномерном безнапорном потоке подземных вод (рис. 8а). В проекции на вертикальную плоскость – отрезок протяженностью x_{s1}–x_{s2}, который в общем случае может находиться ниже отметки свободной поверхности (рис. 8б). Фильтрационный поток сформирован площадной инфильтрацией R в пласте ограниченной протяженности ($0 \le x \le L$), на входной границе которого ($x = L$) задан фильтрационный поток с удельным расходом $|q_0|$. На выходной границе ($x = 0$) – фиксированный уровень воды $h = d_b$ (ГУ I рода). В фильтрационном отношении горизонт является профильно-неоднородным, т.е. характеризуется изменчивостью коэффициента фильтрации по глубине $k = k(z)$.

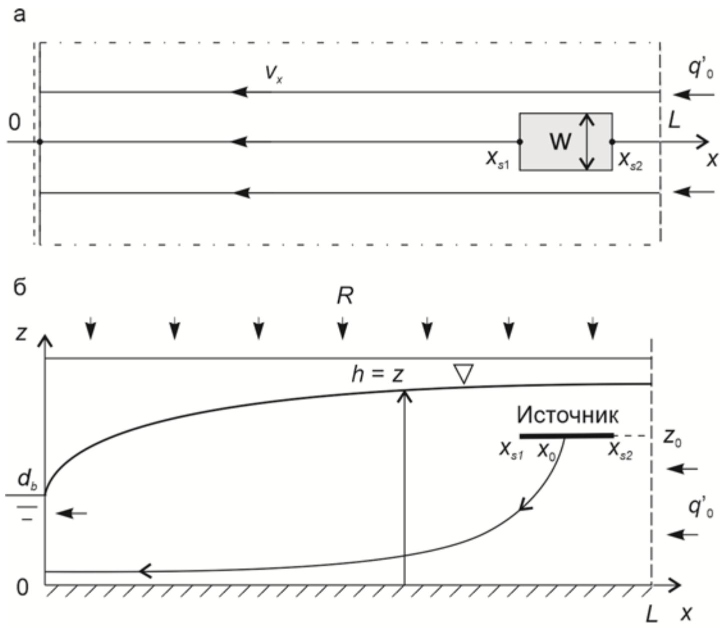


Рис. 8. Источник загрязнения в плановом безнапорном потоке подземных вод: а – вид в плановой плоскости, б – вид в вертикальном разрезе.

Предпосылка Дюпюи-Форхгеймера о постоянстве гидравлического градиента в любой из плоскости $z < h$ в сечении x позволяет упростить решение задачи, записав уравнение для удельного расход фильтрационного потока (на единицу его ширины) в виде

$$q = R(L - x) + q_0 = T_h \frac{dh}{dx}, \ q_0 = |q'_0|, \tag{61}$$

где h – напор ($h = z$), T_h – суммарная проводимость [L^2T^{-1}] определяемая как

$$T_h = \int_0^h k(z)dz. \tag{62}$$

Отсюда получаем выражение для горизонтальной скорости

$$v_x = -k(z)\frac{dh}{dx} = -k(z)R\frac{L - x + \bar{q}_0}{T_h}(\leq 0),\ dh/dx > 0, \tag{63}$$

где $\bar{q}_0 = q_0 / R$.

Производная скорости фильтрации v_x по x, учитывая изменение мощности потока, $T_h = T_h(x)$, будет

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -k(z)R\left[\frac{L - x + \bar{q}_0}{T_h}\right]' = k(z)R\frac{T_h + (L - x + \bar{q}_0)\partial T_h / \partial x}{T_h^2}. \tag{64}$$

В горизонтально слоистом пласте производная функции T_h определяется соотношением

$$\frac{\partial T_h(x)}{\partial x} = k(h)\frac{\partial h(x)}{\partial x}, \tag{64a}$$

где $k(\bar{h})$ – коэффициент фильтрации на депрессионной поверхности.

Для нахождения вертикальной компоненты скорости фильтрации перепишем уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \tag{65}$$

в виде (Rumynin, 2011)

$$v_z = -\int_0^z \frac{\partial v_x}{\partial x}dz = -R\frac{T_h + (L - x + \bar{q}_0)\partial T_h / \partial x}{T_h^2}\int_0^z k(z)dz. \tag{66}$$

Как и в случае напорного потока, из уравнения характеристик (3) может быть получено кинематическое уравнение

$$\frac{dz}{dx} = \frac{v_z}{v_x}, \tag{67}$$

используемое для нахождения координат линий тока $z(x)$

$$\frac{dz}{dx} = \left[\frac{1}{L - x + \bar{q}_0} + \frac{1}{T_h}\frac{\partial T_h}{\partial x}\right]\frac{\int_0^z k(z)dz}{k(z)}. \tag{68}$$

Разделяя переменные и интегрируя в интервалах [x_0, x] and [h_0, z], приходим к общему выражению для произвольной линии тока, берущей начало на поверхности безнапорного потока (x_0, h_0)

$$\int_{h_0}^{z}\frac{k(z)dz}{\int_0^z k(\xi)d\xi} = \ln\frac{L + \bar{q}_0 - x_0}{L + \bar{q}_0 - x} + \int_{x_0}^{x}\frac{1}{T_h(x)}\frac{\partial T_h(x)}{\partial x}dx. \tag{69}$$

Заменяя нижний предел интегрирования в правой части (69) на z_0, получаем уравнение линий тока берущих начало на контуре источника, располагающегося на отметке $z = z_0$ (рис. 8б). Соответственно, меняется и предел интегрирования в числителе дроби в левой части (69).

Уравнение (4.8), записанное в общем виде для произвольной функции $k(z)$, определяет соотношение между координатами $z(x)$; его можно решить, зная начальное значение x_0. Ему соответствует значение высоты водного зеркала, определяемое уравнением потенциометрической поверхности $h(x)$. Варьируя x_0 в интервале $0 < x < L$, получаем семейство линий тока, определяющее картину течения в вертикальной плоскости. Интегральный член в правой части уравнения (4.8) отражает влияние изменения мощности потока на его конфигурацию. Если этот интеграл равен нулю ($\partial T_h / \partial x = 0$), мы приходим к случаю напорного водоносного горизонта (разд. 1.1).

2.2. Временные характеристики процесса

Согласно ранее представленному характеристическому уравнению (3), для определения времени миграции равновесно сорбируемого компонента вдоль линии тока можно использовать одно из кинематических равенств (4)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_x}{nR_d} \text{ или } \frac{dz}{dt} = \frac{v_z}{nR_d} \tag{70}$$

Интегрируя уравнения (70) по частям, получаем уравнения для времени нахождения частицы в безнапорном потоке до момента разгрузки на границе I рода при ее исходном положении x_0 на «зеркале»

$$t = nR_d \int_{x_0}^{x=0} \frac{dx}{v_x} \text{ или } t = nR_d \int_{z_0(x_0)}^{z(x=0)} \frac{dz}{v_z} \; . \tag{71}$$

Более общий случай $z_0 < h$ и особенности интегрирования решений (71) рассматриваются ниже (разд. 2.5).

2.3. Решение для концентрационной функции $C(0,t)$

Характеристика $\bar{x}_0 = x_0 / L$ ($0 \le \bar{x}_0 \le 1$) может рассматриваться в качестве функции времени, связывающей суммарный расход потока $Q_{tot} = RL + q_0$ с частью расхода фильтрационного потока $Q(t)$, которая имеет характерное время нахождения частиц менее или равное t. Иными словами – кумулятивное распределение времен нахождения частиц жидкости в фильтрационном потоке,

$$F(t) = \bar{x}_0(t) \; . \tag{72}$$

При постоянной концентрации некоторой индикаторной метки (загрязняющий компонент) в инфильтрационных водах ($z = h$) или в заглубленном источнике ($z = z_0$), распределение $F(t)$ может рассматриваться как доля инфильтрационных вод, поступивших в расчетное сечение $\bar{x} = 0$ из области $\bar{x} \ge \bar{x}_0$ в момент t, в общем фильтрационном расходе, т.е. кумулятивная функция $F(t)$ может использоваться для определения относительной концентрации, $\bar{C}(t)$ (в предпосылке поршневого вытеснения, пренебрегающей диффузионным обменом веществом между линиями тока):

$$\begin{aligned} &\bar{C}(t) = 0, t \le t_1, \\ &\bar{C}(t) = [F(t) - F(t_1)]\exp(-\lambda t), t_1 < t \le t_2, \\ &\bar{C}(t) = [F(t_2) - F(t_1)]\exp(-\lambda t), \; t > t_2 . \end{aligned} \tag{73}$$

Решение для импульса связано с производной функции $F(t)$ (разд. 1.3.2)

$$C(t) = \frac{P}{R_{z_0}} F'(t)\exp(-\lambda t),\ t_1 \le t < t_2,$$
$$C(t) = 0, \qquad\qquad t \ge t_2\ . \tag{74}$$

где P – масса вещества на единицу площади источника загрязнения [ML^{-2}], R_{z_0} – вертикальная скорость потока в плоскости источника, которая является функцией координаты x_0, определяющей линию тока, по которой вещество мигрирует к выходному сечению потока $x = 0$,

$$R_{z_0} \approx -R\frac{\int\limits_0^{z_0} k(z)dz}{T_h}\ . \tag{75}$$

2.4. Стратифицированный горизонт

2.4.1. Обобщенное решение для функции напора $h(x)$

Пусть стратифицированный пласт характеризуется произвольным изменением коэффициента фильтрации по глубине $k = k(z_i)$ – дискретно меняющаяся функция, с отметками (d_i) контакта соседних горизонтально залегающих слоев (рис. 9). Разделим ленту тока [0, L] на участки, каждый из которых содержит поверхность воды, лежащую в пределах одного i-го слоя (рис. 9). Теперь текущему значению x можно присвоить условный индекс i, равный номеру такого слоя, для которого имеем $x_i \ge x_i^*$, где x_i^* – координата точки пересечения поверхности депрессионной поверхности потока с основанием слоя.

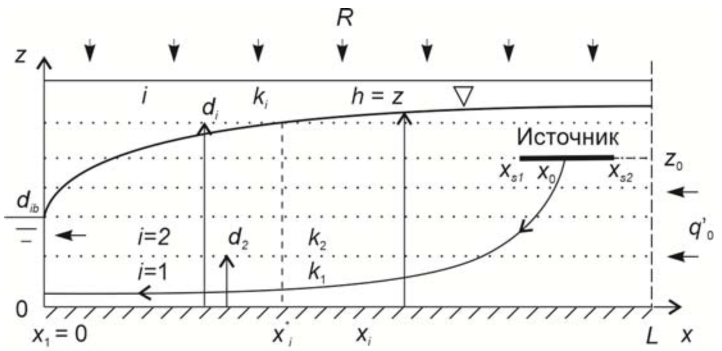


Рис. 9. Концептуальная модель к выводу уравнений свободной поверхности безнапорного потока в стратифицированном горизонте и траекторий движения частиц в нем.

Суммарная проводимость является суммой проводимостей двух профильных зон потока:

$$T_h = \sum_{j=1}^{i-1} T_j + k_i(h - d_i)\,; \tag{76}$$

здесь $\sum_{j=1}^{i-1} T_j = \sum_{j=1}^{i-1} k_j (d_{j+1} - d_j)$ – проводимость полностью обводненных слоев выше подошвы горизонта, представленного первым слоем $i = 1$, $T_j = k_j(d_{j+1} - d_j)$; $k_i(h - d_i)$ – проводимость верхнего частично обводненного слоя мощностью $(h - d_i)$.

Уравнение для удельного расхода фильтрационного потока (61) принимает вид

$$q = [\sum_{j=1}^{i-1} T_j + k_i(h - d_i)] \frac{dh}{dx_i} \qquad (77)$$

или

$$R(L - x_i) + q_0 = [\sum_{j=1}^{i-1} T_j + k_i(h - d_i)] \frac{dh}{dx_i}. \qquad (78)$$

Пусть $y_i = L - x_i$. Тогда, интегрируя (77), мы получаем решение в форме:

$$y_i^2 - 2\bar{q}_0 x_i = -\frac{2h}{R} [\sum_{j=1}^{i-1} T_j + k_i(\frac{h}{2} - d_i)] + C_i, \qquad (79)$$

где C_i – константа интегрирования (i = 1, 2, …), $\bar{q}_0 = q_0 / R$.

Для того, чтобы найти C_i мы используем условие неразрывности поверхности потока на контакте слоев, $h = d_i$; напор непрерывно меняется на межзональной границе, где свободная водная поверхность проходит через подошву слоя i:

$$y_i^2 - 2\bar{q}_0 x_i = -\frac{2d_i}{R} [\sum_{j=1}^{i-1} T_j + k_i(\frac{d_i}{2} - d_i)] + C_i, \qquad (80a)$$

$$y_i^2 - 2\bar{q}_0 x_i = -\frac{2d_i}{R} [\sum_{j=1}^{i-2} T_j + k_{i-1}(\frac{d_i}{2} - d_{i-1})] + C_{i-1}. \qquad (80b)$$

Вычитая (80б) из (80а), получаем связь между постоянной интегрирования в соседних слоях:

$$C_i - C_{i-1} = -\frac{d_i^2}{R}(k_i - k_{i-1}), \qquad (81)$$

т. е. значение i-й константы можно найти по значению предыдущей (i–1)-й константы.

Для нахождения первой константы ($i = 1$), C_1, воспользуемся граничным условием Дирихле на левой границе модельной области (рис. 9), приняв для определенности

$$x = x_1 = 0,\ h = d_{bi}; \qquad (82)$$

В этом случае, $y_1^2 = L^2$, и решением (79) становиться

$$C_1 = L^2 + \frac{2d_{bi}}{R}\left(\sum_{j=1}^{ib-1} T_j - \frac{k_{ib} d_{ib}}{2}\right). \qquad (83)$$

Теперь, когда константа C_1 известна, мы можем использовать (81) для записи аналитического выражения для членов всего последующего ряда: C_2, C_3, …, C_i.

$$C_i = L^2 + \frac{2d_{i_b}}{R}\left(T\sum_{j=1}^{i_b-1} T_j \varphi_j - \frac{k_i d_{i+1}^2}{2}\right), \qquad (84)$$

где $T_j = k_j(d_{j+1} - d_j)$, $\varphi_j = (d_j + d_{j+1})/2$.

Решение (79) принимает вид

$$(L-x_i)^2 = L^2 + 2\bar{q}_0 x_i - \frac{2}{R}\left(\sum_{j=1}^{i_b-1}(d_{j+1}-d_j)k_j\right)(h-d_{i_b}) - \frac{2}{R}\left(h\sum_{j=i_b}^{i-1}T_j - \sum_{j=i_b}^{i-1}T_j\varphi_j\right) - \frac{k_i}{R}(h-d_i)^2 . \quad (85)$$

Чтобы распространить приведенное выше решение на непрерывно меняющееся поле гидравлической проводимости, можно представить его с помощью большого количества очень тонких слоев (Rathore et al., 2020):

$$\sum_{j=1}^{i_b-1}(d_{j+1}-d_j)k_j = \int_0^{d_b} k(z)dz\,,\ \sum_{j=i_b}^{i-1}T_j = \int_{d_b}^{h} k(z)dz\,,\ \sum_{j=i_b}^{i-1}T_j\varphi_j = \int_{d_b}^{h} k(z)zdz\,, \quad (86)$$

Интегральный эквивалент решения (85) для непрерывной функции $k(z)$ имеет вид

$$(L-x)^2 = L^2 + 2\bar{q}_0 x - \frac{2}{R}\left(\int_0^{d_b} k(z)dz\right)(h-d_b) - \frac{2}{R}\left(h\int_{d_b}^{h} k(z)dz - \int_{d_b}^{h} k(z)zdz\right), \quad (87)$$

где d_b – напор на границе, $h(x=0)=d_b$.

Выражение (85) представляют собой квадратное уравнение, коэффициенты которого зависят от номера слоя i, в котором необходимо определить напор. Номер этого слоя может быть определен специальными итерационными процедурами.

Предположим, что известен номер слоя i, показывающий расположение уровня грунтовых вод. Уравнение (85) можно записать в виде

$$D - A(h-d_{i_b}) - Bh + C - E(h-d_i)^2 = 0\,, \quad (88)$$

где $A = \frac{2}{R}\left(\sum_{j=1}^{i_b-1}(d_{j+1}-d_j)k_j\right)$, $B = \frac{2}{R}\sum_{j=i_b}^{i-1}T_j$, $C = \frac{2}{R}\sum_{j=i_b}^{i-1}T_j y_j$, $D(x_i) = L^2 + 2\bar{q}_0 x_i - (L-x_i)^2$,

$E = \frac{k_i}{R}$.

Как видно, значение i определяет количество слагаемых в сумме. Решение уравнения (88) имеет вид:

$$h = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a[c + D(x_i)]}}{2a}\,, \quad (89)$$

где $a = -E$, $b = 2d_i E - A - B$, $c = Ad_{ib} + C - d_i^2 E$.

Производная функции (89) равна отношению

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 2\frac{L + \bar{q}_0 - x}{\sqrt{b^2 - 4a\left(c + L^2 + 2\bar{q}_0 x - (L-x)^2\right)}}\,, \quad (90)$$

которое понадобиться нам в дальнейших построениях.

2.4.2. Время миграции

Интегрирование первого дифференциального равенства (70) дает решение для определения времени в виде

$$t = -\frac{nR_d}{R}\int_{x_0}^{0}\frac{T_h dx}{k[z(x)](L + \bar{q}_0 - x)}\,,\ T_h = \int_0^{h(x)} k(x,z)dz\,. \quad (91)$$

При постоянных n и R_d формулу (91) можно переписать в виде

$$\tau = -\int_{\bar{x}_0}^{0} \frac{\bar{T}_h(\bar{x})d\bar{x}}{k[\bar{z}(\bar{x})](1+\bar{q}_{0L}-\bar{x})}\ , \tag{92}$$

$\bar{x} = x/L$, $\bar{x}_0 = x_0/L$, $\bar{q}_{0L} = q_0/RL$, $\bar{T}_h(\bar{x}) = \int_0^{\bar{h}(\bar{x})} k(\bar{x},\bar{z})d\bar{z}$, $\bar{h} = h/d_{ib}$. В данном случае время нормируется относительно глубины слоя воды в выходном сечении потока:

$$\tau = \frac{Rt}{nR_d d_{ib}}\ . \tag{92a}$$

В решении (92) функция $k[\bar{z}(\bar{x})]$ представляет собой коэффициент фильтрации в точке на линии тока с текущей координатой $\bar{z}(\bar{x})$, определяемой уравнением (68).

При расположении источника ниже свободной поверхности фильтрационного потока, на отметке $z = z_0$, для определения времени t (а также t_1 и t_2) необходимо: (1) сначала определить «имиджевую» точку $x_0' = x_0(h)$ на уровенной поверхности h, которая соответствует точке источника $x_0(z_0)$; для этого используется уравнение линии тока (69), в котором $z \equiv z_0$, $x \equiv x_0$, а $x_0 \equiv x_0'$ (нижний предел интегрирования) – искомая величина; (2) затем необходимо выполнить интегрирование (91) в пределах от x_0' (нижний предел) до 0 (верхний предел), что дает время миграции частицы из «имиджевой» точки до границы $x = 0$ (t^*), (3) интегрирование (91) в пределах от x_0' до x_0 позволяет определить время t^{**} «погружения» частицы на отметку z_0; (4) наконец, вычитая t^{**} из t^*, получаем искомое время t миграции частицы от x_0 до выходного сечения потока.

2.4.3. Иллюстративные примеры

В случае дискретного представления $k(z)$ расчеты предполагают использование итерационных процедур при нахождении координат поверхности зеркала воды $h(x_i)$ в дискретных точках, линий тока $z(x_i)$ с последующим численным интегрированием для определения времени миграции частиц от источника t до выходного сечения потока и определения функции кумулятивного распределения $F(t)$ и ее производных $F'(t)$ – TTD-функция (разд. 1.3.2).

2.4.3.1. Расчет свободной поверхности потока

Этот пример демонстрирует применимость и расчетную эффективность описанного выше подхода. Безнапорный водоносный горизонт (L = 1000 м) представлен серией слоев одинаковой мощности ($d_{i+1} - d_i$ = 5 m) с относительно высокой и низкой проницаемостью. Гидропроводность слоев, k_i (i = 1, …, 7), колеблется от 0.02 м/сут до 5 м/сут (табл. 5). Инфильтрация $R = 5{\times}10^{-4}$ м/сут. Суммарная проводимость остается одинаковой во всех трех вариантах (табл. 5).

Таблица 5 . Распределение k_i в семислойной системе

Вариант	Номер слоя, i							T_Σ, м^2/сут
	1	2	3	4	5	6	7	
1	0.1	2	0.05	1	0.02	5	0.5	42.85
	0.1	0.02	1	0.05	2	0.5	5	42.85
3	0.1	0.05	2	1	0.02	5	0.5	42.85

Как и ожидалось, функция напора, $h(x)$, рассчитанная на основе модели (85), весьма чувствительна к порядку слоев (рис. 10). Напор h в зависимости от расстояния от водораздела (L – x) отличается от формы идеального эллипса, ожидаемой для течения в однородном водоносном горизонте. Очевидно, что максимальный напор при x = L , hmax, не может быть рассчитана на основе эффективной полной проводимости, а требует расчета всей свободной поверхности, начиная с границы разгрузки потока x = 0. Результат отличается от того, что рассчитывает получить в случае напорного водоносного горизонта. Действительно, поскольку общая проводимость слоистого напорного водоносного горизонта не зависит от порядка слоев, форма зеркала грунтовых вод также не меняется.

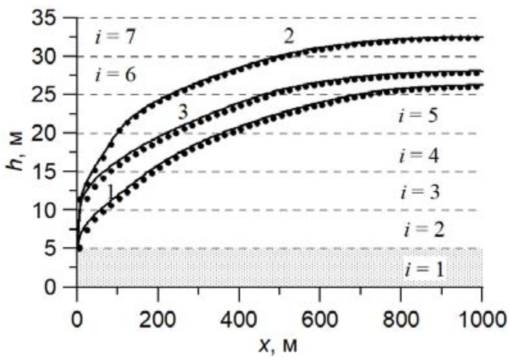


Рис. 10. Свободная поверхность потока $h(x)$. Номер кривой отвечает номеру расчетного варианта (табл. 5). Сплошные кривые – аналитическое решение, уравнение (85); точками показано решение, полученное конечно-разностным методом с помощью программного комплекса MODFLOW.

Применимость модели (85) и аппроксимация Дюпюи–Форхгеймера были проверены с помощью численного решения двумерного уравнения фильтрации с помощью кода MODFLOW (McDonald and Harbaugh, 1988), позволяющим задать более реалистичное граничное условие, допускающим формирование зоны высачивания. Как видно на рис. 10, аналитическое и численное решения хорошо согласуются. Подход Дюпюи-Форхгеймера немного занижает истинную высоту уровня грунтовых вод вблизи границы разгрузки потока из-за наличия зоны фильтрации над уровнем воды при x = 0, как это было показано ранее (Youngs, 1990). Таким образом, представленный сравнительный анализ показал, что аппроксимация Дюпюи-Форхгеймера является достаточно точной, даже когда нижележащие напорные слои расположены близко к руслу реки, и существуют значительные изменения гидравлической проводимости в вертикальном направлении, которые могут сильно изменить профиль уровня грунтовых вод. Анализ расширяет более раннюю работу Luther and Haitjema (1998) и некоторых других авторов.

2.4.3.2. Расчет линий тока

Рис. 5 иллюстрирует семейство линий потока, рассчитанных по уравнению (69) для трех представленных выше стратифицированных систем, различающихся распределениями коэффициента фильтрации по глубине (см. табл. 5). Эти графики показывают достаточно хорошее соответствие между аналитической моделью (69) и численным моделированием (кривые, рассчитанные методом прямого отслеживания движения частиц с использованием кода PMPATH). Некоторые расхождения в субвертикальных участках линий тока можно объяснить упрощениями в построении аналитической модели, а именно аппроксимацией первого порядка для вертикальной составляющей скорости v_z (разд. 2.1).

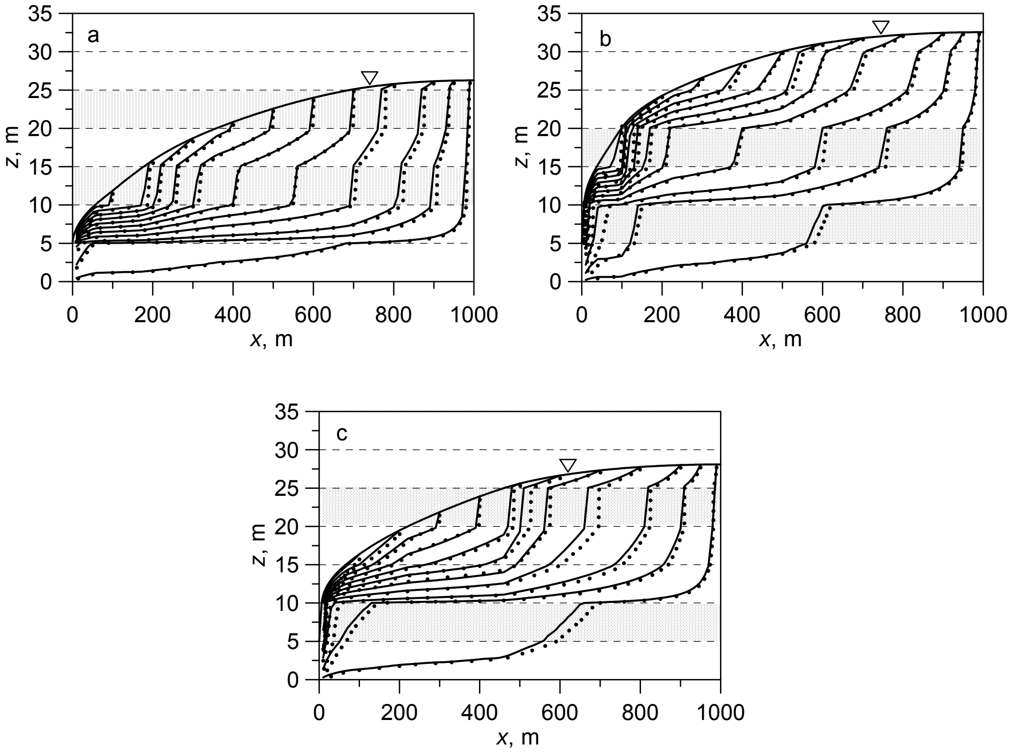


Рис. 11. Структура линий тока в стратифицированном безнапорном пласте. Графики (б), (в), and (г) соответствуют расчетным вариантам 1, 2 and 3, соответственно (рис. 10, табл. 5). Сплошные линии – аналитическое решение (69), Точками дано решение, полученное численными методами с помощью программного кода PMPATH; менее проницаемые слои показаны серым цветом.

Следует отметить, что средние градиенты фильтрационного потока в разных вариантах расчета существенно различаются из-за различий в подъеме уровня грунтовых вод, в частности в точке $x = L$ (h_{max}), и эта характеристика определяется гидропроводностью слоя 2 (k_2), перекрывающий базовый слой (k_1): чем меньше k_2, тем больше h_{max}.

2.5. Решения для частных распределений $k(z)$, заданных аналитическими функциями

2.5.1. Однородный горизонт $k(z)$ = const

2.5.1.1. Решение задачи

Для дальнейшего анализа нам потребуются следующие характеристики безнапорного фильтрационного потока (рис. 8):

– уравнение поверхности $h(x)$

$$(L-x)^2 = L^2 + 2\bar{q}_0 x - \frac{k}{R}(h^2 - d_b^2)\,,\ \bar{q}_0 = q_0 / R\,; \tag{93}$$

– компоненты скорости фильтрации (63, 66)

$$v_x = -R\frac{L-x+\bar{q}_0}{h(x)}\,,\ v_z = -R\left(1+\frac{L-x+\bar{q}_0}{h}\frac{dh}{dx}\right)\frac{z}{h}\,. \tag{94}$$

Частный случай (93) при $q_0 = 0$ отвечает решениям (Bear, 1972; Fetter, 1994).
Тогда координаты линий тока $z(x)$ определяются из дифференциального тождества (68):

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{L-x+\bar{q}_0} + \frac{dh}{h}\,. \tag{95}$$

Формально говоря, функция $z = z(x,h)$ должна иметь полный дифференциал, определяемый как

$$dz = z'_x(x,h)dx + z'_h(x,h)dh\,, \tag{96}$$

Интегрируя (96), получаем

$$\ln z = \ln(1-x+\bar{q}_0) + \ln h + C\,, \tag{97}$$

где C – константа интегрирования. Для ее нахождения зададимся условием

$$z = h \ \text{ при } x = x_0\,, \tag{98}$$

что дает $C = \ln(L - x_0 + \bar{q}_0)$ и, соответственно,

$$z = \frac{L-x_0+\bar{q}_0}{L-x+\bar{q}_0}h(x) = \frac{L-x_0+\bar{q}_0}{L-x+\bar{q}_0}\sqrt{d_b^2 + [L^2-(L-x)^2+2\bar{q}_0 x]/\bar{k}}\,,\ \bar{k} = k/R\,. \tag{99}$$

Время миграции может быть рассчитано посредством интегрирования одного из кинематических равенств (70), например,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_x}{nR_d}\,, \tag{100}$$

где v_x определяется согласно (94). Отсюда время миграции частицы с поверхности $x = x_0$ до расчетного сечения x определяется по зависимости:

$$t = -\frac{nR_d}{R}\int_{x_0}^{x}\frac{\sqrt{d_b^2 + [L^2-(L-x)^2+2\bar{q}_0 x]/\bar{k}}}{L-x+\bar{q}_0}dx\,, \tag{101}$$

которая при $\bar{q}_0 = 0$ отвечает ранее полученному решению (Chesnaux et al., 2005). Время t не зависит от координаты z для точек с одинаковыми координатами $x = x_0$.

Концентрация в выходном сечении x = 0 в случае постоянно действующего концентрационного источника $C = C_0$ и фоновых значениях в начальный момент времени $C = 0$ определяется по формуле смешения потоков: отношения массового потока в пределах ленты тока шириной $x_0 - x_{s1}$ на отметке расположения источника (z_0) к суммарному фильтрационному потоку через сечение d. Относительная концентрация $\bar{C}(t) = C / C_0$ отвечает кумулятивной функции $F(t)$ – доли инфильтрационных вод, поступивших в расчетное сечение $\bar{x} = 0$ из области $\bar{x} \geq \bar{x}_{s1}$ в момент t, в общем фильтрационном расходе. Иными словами $F(t)$ – кумулятивное распределение времен нахождения частиц в фильтрационном потоке:

$$F(t) = \bar{C} = \frac{x_0(t) - x_{s1}(t_1)}{L + \bar{q}_0} \frac{z_0}{h} \exp(-\lambda t) \text{ при } t \geq t_1, \tag{102}$$

где t_1 – время прихода вещества в сечение x = 0 по кратчайшей линии тока, берущей начало на границе источника $x = x_{s1}$. Оно определяется по формуле (101) в пределах интегрирования [$x = 0$, $x_0 = x_{s1}$]. Решение задачи имеет «стационарное» расширение

$$F(t) = \frac{x_0(t_2) - x_{s1}(t_1)}{L + q_0} \frac{z_0}{h} \exp(-\lambda t) \text{ при } t \geq t_2 . \tag{103}$$

При импульсном характере поступления вещества, в соответствии с (74), решение задачи имеет вид

$$\begin{aligned} C(t) &= \frac{P}{R} \frac{x_0'(t)}{L + \bar{q}_0} \exp(-\lambda t), \quad t_1 \leq t < t_2, \\ C(t) &= 0, \qquad\qquad\qquad t \geq t_2 . \end{aligned} \tag{104}$$

Дифференцируя (101), приходим к решению:

$$\begin{aligned} C(t) &= \frac{P}{nR_d} \frac{L - x_0(t) + \bar{q}_0}{(L + \bar{q}_0)\sqrt{d_b^2 + [L^2 - (L - x_0(t))^2 + 2\bar{q}_0 x_0(t)] / \bar{k}}} \exp(-\lambda t), \quad t_1 \leq t < t_2, \\ C(t) &= 0, \qquad\qquad t \geq t_2 , \end{aligned} \tag{104a}$$

где $x_0(t)$ определяется как нижний предел интегрирования (101) при x = 0 (выходное сечение фильтрационного потока).

2.5.2. Экспоненциально затухающая функция $k(z)$

Коэффициент фильтрации аппроксимируется экспоненциально затухающей функцией $k(z)$, принимающей максимальное значение k_0 на глубине залегания уровня грунтовых вод:

$$k(z) = k_0 \exp[-A(h - z)] , \tag{105}$$

где A – коэффициент, характеризующий скорость затухания проницаемости по глубине.

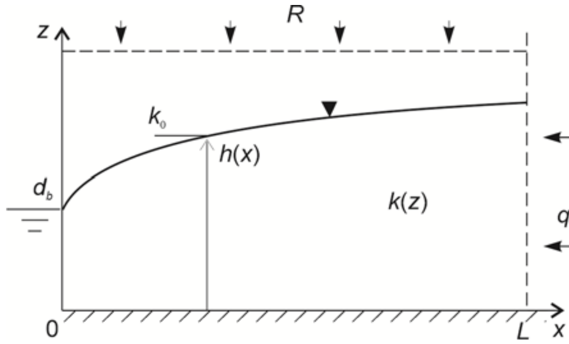


Рис. 12. Концепция пласта с затухающей с глубиной проницаемостью, максимальные значения которой определяются положением свободной поверхности потока.

Такая идеализация приемлема для неглубокого уровня грунтовых вод, который коррелирует с отметками наклонной земной поверхности, и поэтому свободная поверхность везде находится в верхней, наиболее проницаемой части профиля пород: формально можно написать $k(z=h)=k_0=\text{const}$. Более того, сам контакт уровня грунтовых вод с выше расположенной зоной аэрации способствует развитию процессов выветривания, повышающих проницаемость породы.

2.5.2.1. Общее решение

Подставляя (105) под интегралы в уравнении (87), приходим к решению для пьезометрической поверхности $h=h(x)$

$$(L-x)^2 = L^2 + 2\bar{q}_0 x - \frac{2k_0(h-d_b)}{AR} + \frac{2k_0}{A^2 R}\left[\exp(-Ad_b) - \exp(-Ah)\right]. \tag{106}$$

При $A \to 0$ решение (106) переходит в соотношение (93), определяющее координаты поверхности безнапорного потока в однородной среде.

Для определения траекторий движения частиц (линий тока) перепишем уравнение (68), воспользовавшись соотношениями для функции (62)

$$T_h = \int_0^{h(x)} k(z)dz = \frac{k_0}{A}(1-e^{-Ah}),\ \frac{\partial T_h}{\partial x} = k_0 e^{-Ah}\frac{\partial h}{\partial x}, \tag{107}$$

в форме

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{A}\left[\frac{1}{L-x+\bar{q}_0} + \frac{A}{1-e^{-Ah}}\frac{\partial h}{\partial x}\right]\left(1-e^{-Az}\right). \tag{108}$$

Координата z является функцией двух независимых переменных x и h, $z=z(x,h)$, полный дифференциал которой определяется дифференциальным тождеством (96), в соответствии с которым

$$dZ = \frac{1-e^{-Z}}{1-X+Q}dX + \frac{1-e^{-Z}}{1-e^{-H}}dH, \tag{109}$$

$Z=Az$, $H=Ah$, $X=x/L$, $Q=q_0/LR$. Уравнение (109) можно переписать в форме:

$$\frac{dZ}{1-e^{-Z}} = \frac{dX}{1-X+Q} + \frac{dH}{1-e^{-H}}. \tag{110}$$

Интегрируя (110), получаем

$$\ln(1-e^{-Z}) = \ln(1-X+Q) + \ln(1-e^{-H}) + C, \tag{111}$$

где C – константа интегрирования. Для ее нахождения зададимся условием

$$Z = H \text{ при } X = X_0 \;\; (z = h \text{ при } x = x_0), \tag{112}$$

что дает $C = \ln(1 - X_0 + Q)$ и

$$\frac{1-e^{Z}}{1-e^{H}} = \frac{1-X_0+Q}{1-X+Q}, \tag{113}$$

$$Z(X,H) = \ln\left[1 - \frac{1-X_0+Q}{1-X+Q}(1-e^{H})\right]. \tag{114}$$

Время миграции может быть рассчитано, как и в предыдущем случае однородного пласта, посредством интегрирования первого кинематического равенства (70), где v_x определяется, согласно (63), выражением

$$v_x = -\frac{RAe^{Az}}{e^{Ah}-1}(L - x + \bar{q}_0). \tag{115}$$

Интегрирование (100) дает времени миграции частицы с поверхности $x = x_0$ до расчетного сечения x:

$$t = -\frac{nR_d}{AR}\int_{x_0}^{x}\frac{e^{Ah}-1}{e^{Az}(L-x+\bar{q}_0)}dx. \tag{116}$$

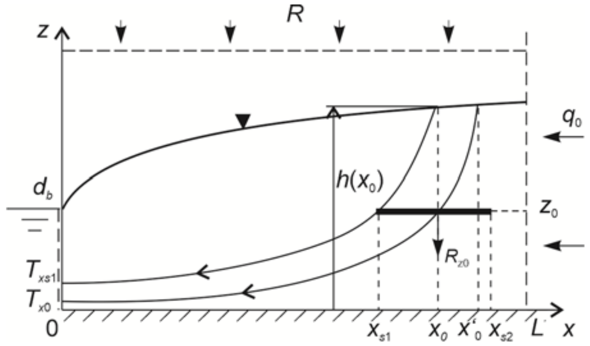


Рис. 13. К расчету координат линий тока при расположении источника на отметке z_0.

Поскольку

$$e^{Az} = 1 - \frac{L - x_0 + \bar{q}_0}{L - x + \bar{q}_0}(1 - e^{Ah}), \tag{117}$$

то формула (116) принимает вид

$$t = -\frac{nR_d}{AR}\int_{x_0}^{x}\frac{e^{Ah}-1}{(L-x+\bar{q}_0)+(L-x_0+\bar{q}_0)(e^{Ah}-1)}dx. \tag{118}$$

Если источник находится на глубине z_0 от поверхности, то сначала находится положение на поверхности воды «имиджевой» точки (x_0', h), соответствующей точке (x_0, z_0) и принадлежащей той же линии тока (рис. 13). Для этого используется уравнение (114), переписанное в виде

$$Az_0 = \ln\left[1 - \frac{L - x_0' + \bar{q}_0}{L - x_0 + \bar{q}_0}(1 - e^{Ah_0})\right], \qquad (119)$$

где $h_0 = h(x_0)$ – напор в сечении $x = x_0$. Отсюда

$$x_0' = (L + \bar{q}_0) - (L - x_0 + \bar{q}_0)\left[\frac{1 - e^{Az_0}}{1 - e^{Ah_0}}\right]. \qquad (120)$$

В результате получаем:

$$t = -\frac{nR_d}{AR}\left[\int_{x_0'}^{0} \frac{e^{Ah} - 1}{(L - x + \bar{q}_0) + (L - x_0' + \bar{q}_0)(e^{Ah} - 1)}dx - \int_{x_0'}^{x_0} \frac{e^{Ah} - 1}{(L - x + \bar{q}_0) + (L - x_0 + \bar{q}_0)(e^{Ah} - 1)}dx\right]. \qquad (121)$$

Средняя концентрация на границе выходного сечения горизонта (x = 0), может быть выражена через отношение расхода массового потока в пределах зоны, ограниченной линиями тока x_{s1} и $x_0(t)$ (рис. 13), к величине расхода суммарного фильтрационного потока. Поскольку при одинаковом градиенте $dh(x = 0)/dx$ расходы пропорциональны проводимостям соответствующих зон, решение миграционной задачи можно представить в терминах кумулятивной функции $F(t)$ (73)

$$F(t) = \frac{T(t)}{T_{hb}},\ F(t_1) = \frac{T(t_1)}{T_{hb}},\ F(t_2) = \frac{T(t_2)}{T_{hb}},$$

$T(t_1) = \frac{k_0}{A}[1 - \exp(-Az(x_{s1}))]$, $T(t_2) = \frac{k_0}{A}[1 - \exp(-Az_{s2})]$, $T_{hb} = \frac{k_0}{A}[1 - \exp(-Ad_b)]$. Или в явном виде:

$$\bar{C}(t) = \frac{\exp[Az(t_1)] - \exp[Az(t)]}{\exp(Ad_b) - 1}\exp(-\lambda t),\ t_1 < t \le t_2, \qquad (122)$$

$$\bar{C}(t) = \frac{\exp[Az(t_1)] - \exp[Az(t_2)]}{\exp(Ad_b) - 1}\exp(-\lambda t),\ t > t_2,$$

где $z(t)$ – координата, отвечающая времени прихода частиц по линиям тока с текущими значениями $x_0(t)$, $z(t_1)$ – то же для кратчайшей линии тока x_{s1}.

Решение задачи для импульсного входного сигнала (74) требует определения вертикального потока R_{z_0} на глубине z_0 расположения концентрационного источника. Для этого можно воспользоваться формулой (66), переписав ее в виде:

$$R_{z_0} = -R\frac{\exp(Az_0) - 1}{\exp(Ah(x_0)) - 1}. \qquad (124)$$

Как видно, R_{z_0} является функцией координаты $x_0(t)$, т.е. импульс массы, приносимой каждой элементарной лентой тока в сечение $x = 0$, в момент времени t будет отличаться от импульса в момент $t - dt$.

2.5.2.2. Пример

Он отвечает условиям задачи (разд. 1.4.3.2), связанной с оценкой последствий высвобождения радиоактивных вод из источника, расположенного в массиве кристаллических трещиноватых пород. Ранее фильтрация, происходящая в пласте постоянной мощности 600 м, рассматривалась в напорной постановке, профиль проницаемости задавался экспоненциально затухающей функцией (33). В обоих примерах коэффициенты A и k_0 функции $k(z)$, а также интенсивность инфильтрационного питания R одинаковые. На контуре разгрузки безнапорного потока h_b = 320 м, что обеспечивает примерно такой же перепад напоров (около 280 м) как и при напорной фильтрации в пласте постоянной мощности, т.е. геометрическое подобие двух задач сохраняется. Как и ранее в разд. 1.4.3.2, нами рассматривались три варианта размещения источника загрязнения: z_0 = 200, 300, 400 м, что отвечает примерно тем же глубинам от поверхности, или отметках 0 м, 100 м и 200 м (рис. 14).

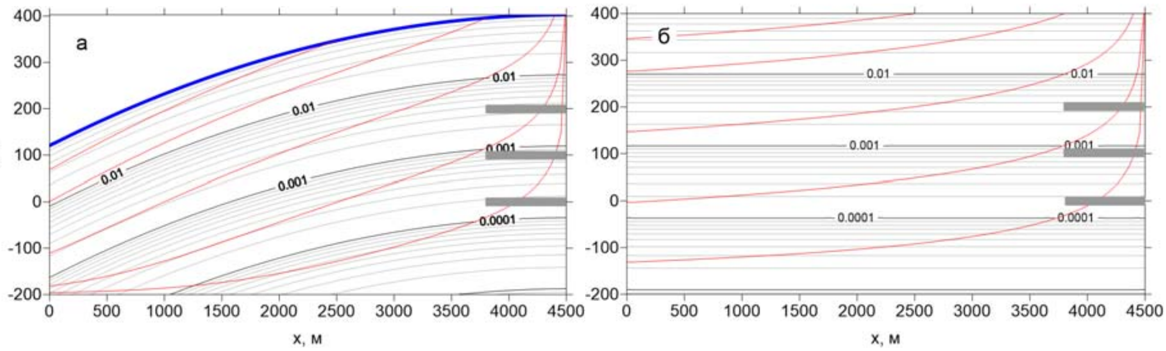
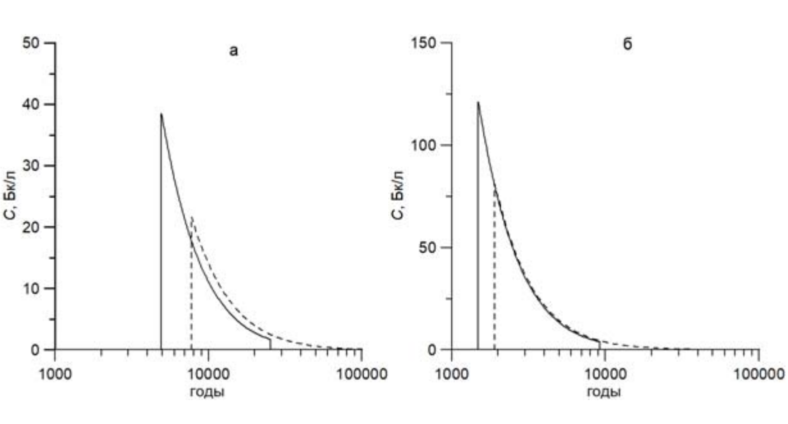


Рис. 14. Линии тока в безнапорном (а) и напорном (б) пласте (координаты начальных точек $x = x_0$, $z = z_0 = 0$ на обоих рисунках одинаковые). Тонкие линии – изолинии коэффициента фильтрации (м/сут). Синяя линия на первом рисунке – свободная поверхность воды. Серыми горизонтальными прямоугольниками показано положение источника загрязнения для трех расчетных вариантов.

Как видно (рис. 14а), задание функции проницаемости на основе зависимости (105) приводит в безнапорной постановке к концентрированию линий тока вблизи свободной поверхности потока, которая располагается в области наиболее проницаемых пород – уравнение (114). В случае горизонтальной стратификации $k(z)$ (33), деформация линий тока не столь выражена (рис 14б). Интересно также отметить, что расход потока по лентам тока в пределах границ источников, в двух модельных вариантов примерно одинаков.



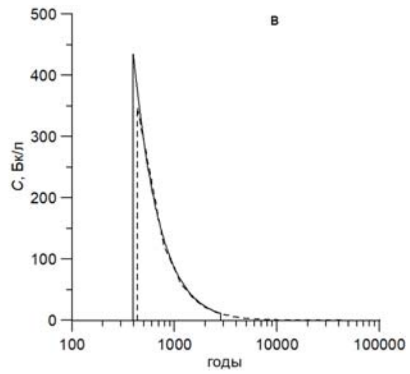


Рис. 15. Концентрация компонента в выходном сечении в случае безнапорного (сплошные линии) и напорного (штриховые линии) фильтрационного потока при расположении источника загрязнения на отметках глубин (см. рис. 14) а – 0 м, 100 м и 200 м.

Концентрационные распределения в зоне разгрузки как решение транспортной задачи в случае безнапорного и напорного пласта заметно различаются при расположении источника загрязнения в нижней части массива (рис. 15а). Разница времен составляет около 3 тыс. лет, что отвечает погрешности более 50%. Различия в моментах регистрации пиковых значений концентрации падают при приближении источника к поверхности (рис. 15б и 15в). Ранний приход загрязнения объясняется повышенными градиентами напора в случае безнапорной фильтрации в ограниченном пласте, на выходной границе которого задано ГУ I рода. Решение задачи в напорной постановке отвечает условию полуограниченного пласта, в котором гидравлический градиент определяется только суммарной проводимостью T_m и инфильтрацией R (при q_0 = 0). Наконец, положение источника загрязнения кардинальным образом влияет на максимальные (пиковые) значения концентрации: расположение источника на высоких отметках приводит к более, чем десятикратному росту пиковых концентраций, что связано с падением степени разбавления загрязнения чистыми водами.

2.5.3. Линейно затухающая функция $k(z)$

В данной модели коэффициент фильтрации является линейно убывающей с глубиной функцией $k(z)$,

$$k(z) = k_m + (k_0 - k_m)\frac{z}{h}, \qquad (125)$$

которая, как видно, принимает максимальное значение k_0 на глубине залегания уровня грунтовых вод (рис. 12), а минимальное, k_m, вблизи подошвы горизонта.

2.5.3.1. Общее решение

Уравнение свободной поверхности может быть получено из формулы для расхода фильтрационного потока (61), переписанной относительно производной dh/dx в виде

$$\frac{dh}{dx} = R\frac{(L-x)+\bar{q}_0}{T_h}, \quad T_h = \int_0^h k(z) = \frac{k_0 + k_m}{2}h, \ \bar{q}_0 = q_0 / R. \qquad (126)$$

Интегрируя (61), получаем

$$h^2 = d_b^2 + \frac{2\bar{q}_0 x}{\bar{k}} + \frac{L^2}{\bar{k}} - \frac{(L-x)^2}{\bar{k}}, \quad \bar{k} = \frac{k_0 + k_m}{2R}. \tag{127}$$

Для определения траекторий движения частиц (линий тока) перепишем уравнение (68), воспользовавшись соотношениями

$$\frac{1}{T_h}\frac{\partial T_h}{\partial x} = \frac{1}{h}\frac{dh}{dx} = \frac{1}{\bar{k}h^2}(L - x + \bar{q}_0), \quad \frac{\int_0^z k(z)dz}{k(z)} = \frac{k_m + \frac{k_0 - k_m}{2}\frac{z}{h}}{k_m + (k_0 - k_m)\frac{z}{h}} z, \tag{128}$$

в форме

$$\frac{dz}{dx} = \left[\frac{1}{L - x + \bar{q}_0} + \frac{1}{\bar{k}h^2}(L - x + \bar{q}_0)\right] \frac{k_m + \frac{k_0 - k_m}{2}\frac{z}{h}}{k_m + (k_0 - k_m)\frac{z}{h}} z. \tag{129}$$

Разделяя переменные, приходим к уравнению для линий тока в интегральной форме:

$$\int_{h_o}^{z} \frac{k_m + (k_0 - k_m)\frac{z}{h}}{(k_m + \frac{k_0 - k_m}{2}\frac{z}{h})z} dz = \ln\frac{L - x_0 + \bar{q}_0}{L - x + \bar{q}_0} + \frac{1}{2}\ln\frac{\bar{k}d_b^2 + 2x(\bar{q}_0 + L) - x^2}{\bar{k}d_b^2 + 2x_0(\bar{q}_0 + L) - x_0^2}. \tag{130}$$

Координата z является функцией двух независимых переменных x и h, $z = z(x,h)$, ее нахождение требует численного интегрирования и итерационных процедур.

Время миграции может быть рассчитано посредством интегрирования одного из кинематических равенств (70), например, второго

$$\frac{dz}{dt} = \frac{v_z}{nR_d}, \tag{131}$$

где v_z определяется согласно (66):

$$v_z = -R\left[1 + \frac{1}{\bar{k}h^2}(L - x + \bar{q}_0)^2\right] \frac{2(k_m + \frac{k_0 - k_m}{2}\frac{z}{h})}{(k_0 + k_m)h} z. \tag{132}$$

В этом случае

$$t = nR_d \int_{z_0(x_0)}^{z(x=0)} \frac{dz}{v_z} = -\frac{nRd}{R} \int_{z_0(x_0)}^{z(x=0)} \frac{(k_0 + k_m)h}{\left[1 + \frac{1}{\bar{k}h^2}(L - x + \bar{q}_0)^2\right] 2(k_m + \frac{k_0 - k_m}{2}\frac{z}{h})} \frac{dz}{z}. \tag{133}$$

Нахождение времени миграции вдоль траектории $z = z(x,h)$ требует довольно сложных вычислительных операций итеративного характера.

Приближенное решение может быть получено на основе предпосылки о слабом влиянии изменения мощности потока на траектории движения частиц жидкости (129). В этом случае интегрирование уравнение

$$\frac{k_m + (k_0 - k_m)\frac{z}{h}}{(k_m + \frac{k_0 - k_m}{2}\frac{z}{h})z} dz = \left[\frac{dx}{L - x + \bar{q}_0} + \frac{dh}{h}\right], \tag{134}$$

подобно тому, как это делалось ранее (см. 95 и 108), приводит к уравнению траекторий движения частиц

$$z=\frac{\sqrt{k_m^2+(k_0^2-k_m^2)C(x_0,x)}-k_m}{k_0-k_m}h\,,\;C(x_0,x)=\frac{L-x_0+\bar{q}_0}{L-x+\bar{q}_0}\,. \tag{135}$$

При $k_0 = k_m = k$ (однородный пласт) приходим к (99). Расчеты по формуле (135) дают вполне приемлемые для практики результаты при расположении источника на поверхности потока или на небольшой глубине. Основываясь на (108), можно показать, что

$$v_x=-R\frac{L-x+\bar{q}_0}{T_h/k(z)}=-2R(L-x+\bar{q}_0)\frac{k_m+(k_0-k_m)z}{(k_0+k_m)h^2}\,. \tag{136}$$

Время миграции частиц растворенного вещества, находящихся в начальный момент времени на поверхности (координаты x_0, h_0), до расчетного сечения x будет определяться интегрированием первой формулы (70), или

$$t=-\frac{nR_d}{2R}\int_{x_0}^{x}\frac{(k_0+k_m)hdx}{(L-x+\bar{q}_0)\sqrt{k_m^2+(k_0^2-k_m^2)C(x_0,x)}}dx\,. \tag{137}$$

Если источник находится на глубине z_0 от поверхности, то сначала находится положение на поверхности воды «имиджевой» точки (x_0', h), соответствующей точке (x_0, z_0) и принадлежащей той же линии тока (рис. 13). Для этого решается следующее трансцендентное уравнение относительно x_0':

$$d_b^2+\frac{2\bar{q}_0x_0'}{\bar{k}}+\frac{L^2}{\bar{k}}-\frac{(L-x_0')^2}{\bar{k}}=z_0^2\left(\frac{L-x_0}{L-x_0'}\right). \tag{138}$$

При наличии потока ($\bar{q}_0>0$) координата x_0' может превышать L. Время миграции между точками x_0, z_0 и выходным сечением потока $x = 0$ определяется формулой:

$$t=-\frac{nR_d}{2R}\left[\int_{x_0'}^{0}\frac{(k_0+k_m)hdx}{(L-x+\bar{q}_0)\sqrt{k_m^2+(k_0^2-k_m^2)C(x_0',x)}}-\int_{x_0'}^{x_0}\frac{(k_0+k_m)hdx}{(L-x+\bar{q}_0)\sqrt{k_m^2+(k_0^2-k_m^2)C(x_0,x)}}\right]. \tag{139}$$

Средняя концентрация на границе выходного сечения горизонта ($x = 0$), может быть выражена через отношение расхода массового потока в пределах зоны, ограниченной линиями тока x_{s1} и $x_0(t)$ (рис. 13), к величине расхода суммарного фильтрационного потока. При не меняющемся по глубине градиенте напора, $dh(x=0)/dx$, расходы пропорциональны проводимостям соответствующих зон.

Так, при размещении источника загрязнения на поверхности потока, $z_0 = h$, текущая координата линии тока, пересекающая сечение $x = 0$ будет определяться как:

$$z(x=0,t)=z_d(t)=\frac{L-x_0(t)+\bar{q}_0}{L+\bar{q}_0}\,, \tag{140}$$

откуда

$$T_{x0}=\int_0^{z_d}k(z)dz=(k_m+\frac{k_0-k_m}{2}\frac{z_d}{h})z_d\,,\;\; z_d=z_d(t)\,,\; h=d_b\,. \tag{141}$$

Соответственно, начиная с момента прихода вещества в расчетное сечение $x=0$ по кратчайшей линии тока, берущей начало на поверхности потока x_0, изменение концентрации будет подчиняться закономерности

$$\overline{C}(t)=\frac{T_{x0}(t)}{T_{db}},\ T_{db}=\frac{k_0+k_m}{2}d_b, \tag{142}$$

где T_{db} – суммарная проводимость в сечении x = 0. Фоновая концентрация компонента равна нулю.

Решение миграционной задачи можно представить в терминах кумулятивной функции $F(t)$ для нестабильного компонента (73)

$$\begin{aligned}&\overline{C}(t)=0,\, t\le t_1,\\ &\overline{C}(t)=-[F(t)-F(t_1)]\exp(-\lambda t),\ t_1<t\le t_2,\\ &\overline{C}(t)=-[F(t_2)-F(t_1)]\exp(-\lambda t),\ t>t_2,\end{aligned} \tag{143}$$

$$F(t)=\frac{T(t)}{T_{hb}},\ F(t_1)=\frac{T(t_1)}{T_{hb}},\ F(t_2)=\frac{T(t_2)}{T_{hb}}, \tag{144}$$

При расположении источника на поверхности воды

$$T(t)=\left(k_m+\frac{k_0-k_m}{2}\frac{L-x_0+\overline{q}_0}{L+\overline{q}_0}\right)\frac{L-x_0+\overline{q}_0}{L+\overline{q}_0}d_b,$$

$$T(t_1)=\left(k_m+\frac{k_0-k_m}{2}\frac{L-x_{s1}+\overline{q}_0}{L+\overline{q}_0}\right)\frac{L-x_{s1}+\overline{q}_0}{L+\overline{q}_0}d_b,$$

$$T(t_2)=\left(k_m+\frac{k_0-k_m}{2}\frac{L-x_{s2}+\overline{q}_0}{L+\overline{q}_0}\right)\frac{L-x_{s2}+\overline{q}_0}{L+\overline{q}_0}d_b,\ T_{db}=\frac{k_0+k_m}{2}d_b,$$

где $T(t)$ – проводимость горизонта в интервале $[0, z(t)]$, $z(t)$ – координата, отвечающая времени прихода частиц по линиям тока с текущими значениями $x_0(t)$, $z(t_1)$ – то же для кратчайшей линии тока x_{s1}.

При положении источника ниже уровня воды ($z_0 < h$) решение (143) требует корректировки посредством параметра $\overline{T}_{zh}$, характеризующего отношение проводимостей – ниже плоскости источника к суммарной проводимости горизонта:

$$\overline{T}_{zh}=\int_0^{z_0}k(z)dz\Big/\int_0^{h}k(z)dz, \tag{145}$$

$$T(t)=\left(k_m+\frac{k_0-k_m}{2}\frac{L-x_0+\overline{q}_0}{L+\overline{q}_0}\overline{T}_{zh}\right)\frac{L-x_0+\overline{q}_0}{L+\overline{q}_0}\overline{T}_{zh}d_b,$$

$$T(t_1)=\left(k_m+\frac{k_0-k_m}{2}\frac{L-x_{s1}+\overline{q}_0}{L+\overline{q}_0}\overline{T}_{zh}\right)\frac{L-x_{s1}+\overline{q}_0}{L+\overline{q}_0}\overline{T}_{zh}d_b,$$

$$T(t_2)=\left(k_m+\frac{k_0-k_m}{2}\frac{L-x_{s2}+\overline{q}_0}{L+\overline{q}_0}\overline{T}_{zh}\right)\frac{L-x_{s2}+\overline{q}_0}{L+\overline{q}_0}\overline{T}_{zh}d_b,\ T_{db}=\frac{k_0+k_m}{2}d_b,$$

где $\overline{T}_{zh}=2\dfrac{k_m+\dfrac{k_0-k_m}{2h}z_0}{k_0+k_m}\dfrac{z_0}{h}$.

Решение для импульса, как и ранее, находится в терминах функции TTD

$$C(t) = \frac{P}{R_{z_0}} \bar{T}_{zh} F'(t) \exp(-\lambda t), \; t_1 \le t < t_2,$$
$$C(t) = 0, \qquad t \ge t_2, \tag{146}$$

где P – масса вещества на единицу площади источника загрязнения [ML^{-2}], R_{z_0} – вертикальная скорость потока в плоскости источника, которая является функцией x_0 – координатой, определяющей линию тока, по которой вещество мигрирует в выходному сечению потока x = 0,

Решение задачи для импульсного входного сигнала (146) требует определения вертикального потока R_{z_0} на глубине z_0 расположения концентрационного источника. Для этого можно воспользоваться формулой (66), переписав ее в виде:

$$R_{z_0} \approx -R \frac{\int_0^{z_0} k(z)dz}{T_h} = -R \frac{2k_m z_0 + (k_0 - k_m) z_0^2 / h}{(k_0 + k_m) h}. \tag{146a}$$

2.5.3.2. Пример

В разд. 1.4.4.2. выполнялся аналитический расчет последствия высвобождения радиоактивных вод из источника, расположенного в напорном горизонте, представленном трещиноватыми породами (мощностью $m = 600$ м), для трех вариантов размещения источника на различных глубинах z_0 от поверхности (табл. 3, рис. 16). Инфильтрационное питание R = 1.3×10^{-4} м/сут. На границе пласта x = 0 задано, как и в предыдущем примере (рис. 16), ГУ I рода – постоянный напор $h = d_b = 320$ м. Приняв коэффициент k_0 в модели с линейном затуханием проницаемости (47), равным 0.015 м/сут (при k_m = 0), получаем изменение проводимости от 5 м^2/сут на водоразделе до 2.4 м^2/сут в выходном сечении.

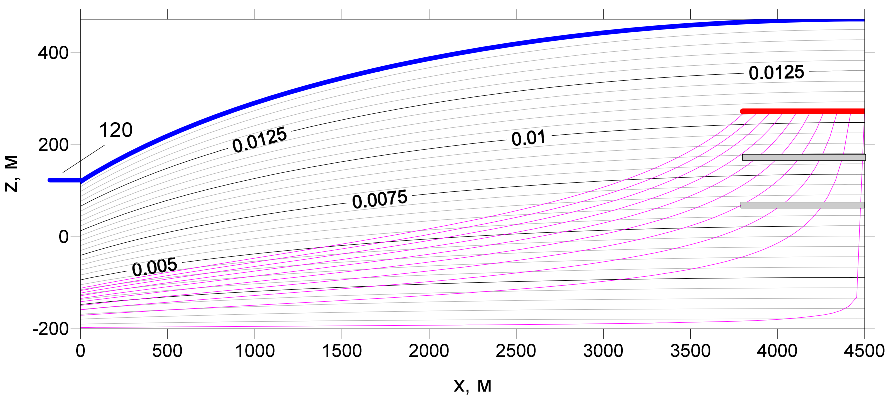


Рис. 16. Изменение проницаемости в профиле водоносного горизонта (черные кривые, числа – м/сут) и траектории движения частиц, берущих начало в плоскости источника (сиреневые кривые). Темная синяя линия – свободная поверхность воды.

Гипсометрическая поверхность подземных вод рассчитана по формуле (127). Максимальный напор от подошвы пласта (отметка -200 м) составляет 673.2 м.

Интенсивность импульсного источника P = 5.7×10^7 Бк/м^2, процессами сорбции и распада приберегается, $\bar{q}_0 = 0$.

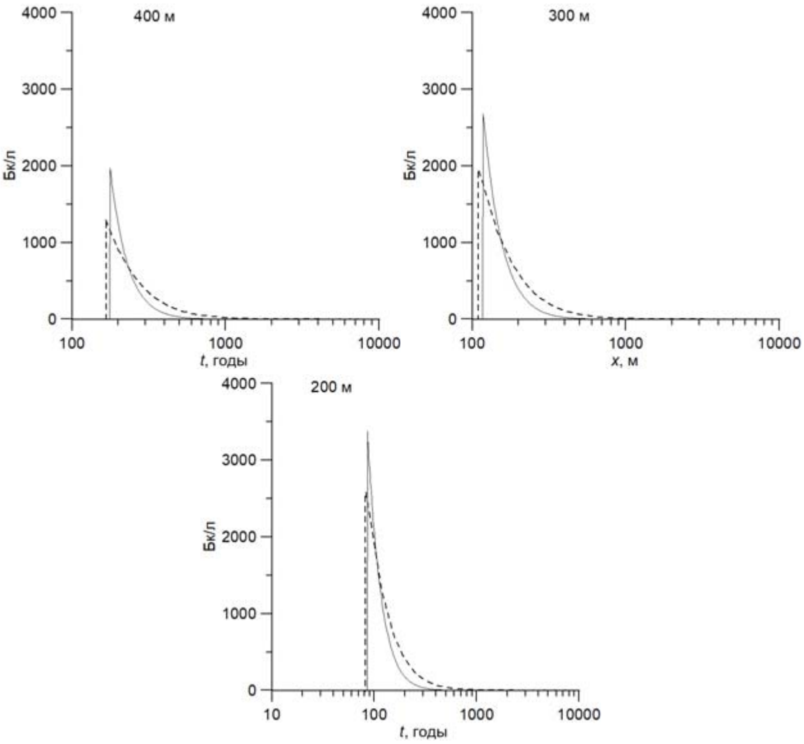


Рис. 17. Сравнение аналитических решений задачи миграции в безнапорной (сплошные кривые) и напорной (штриховые кривые) при линейном затухании проницаемости водоносного горизонта по глубине. Числа на графиках – глубина положения источника от поверхности подземных вод.

Графики решения $C(t)$ (146), полученного при трещиноватости массива 0.003, для случая безнапорной фильтрации, дополнены ранее приведенными расчетами (разд. 1.4.4.2) для напорного пласта (рис. 17). Сравнение результатов указывает на возможность использования для практических целей моделей миграции в условиях напорной фильтрации. Удовлетворительное совпадение результатов расчетов объясняется достаточной протяженностью горизонта ($d_b / L << 1$), сглаживающей роль деформации фильтрационного потока вблизи выходной границы потока. Однако, как и ранее, приходим к выводу, что использование линейной аппроксимации функции $k(z)$ (125) в случае экспоненциального затухания проницаемости по глубине (разд. 2.5.2.) приводит к недопустимым погрешностям в прогнозах загрязнения подземных вод.

Литература

Bear J. 1972. Dynamics of Fluids in Porous Media. American Elsevier Publishing Company, New York.

Chesnaux R., Molson J.W., Chapuis R.P. 2005. An analytical solution for ground water transit time through unconfined aquifers. Ground Water. 43(4), 511–517. https://doi.org/10.1111/j.1745-6584.2005.0056.x.

Fetter C.W. 1994. Applied Hydrogeology. 3rd Edition, Macmillan College Publishing Company, New York.

Haitjema H.M. 1995. On the residence time distribution in idealized groundwatersheds. Journal of Hydrology, 172(1), 127–146, doi:10.1016/0022-1694(95)02732-5.

Jiang X.-W., Wang X.-S., Wan L., Ge S., 2011. An analytical study on stagnation points in nested flow systems in basins with depth-decaying hydraulic conductivity. Water Resour. Res., 47, W01512. https://doi.org/10.1029/2010wr009346.

Luther K.H., Haitjema H.M. 1998. Numerical experiments on the residence time distributions of heterogeneous groundwatersheds. J. Hydrol. 207, 1–17.

Maloszewski P., 2000. Lumped-parameter models as a tool for determining the hydrological parameters of some groundwater systems based on isotope data. Tracers and Modelling in Hydrogeology (Proceedings of the TraM'2000 Conference held at Liège, Belgium, May 2000). IAHS Publ. no. 262.

McDonald M.G., Harbaugh A.W. 1988. A modular three-dimensional finite-difference ground-water flow model. U.S. Geological Survey, Techniques of Water-Resources Investigations, Book 6, Chapter A1. Washington, D.C.: United States Government Printing Office.

Rathore S.S., Zhao Y., Lu C., Luo J. 2018. Defining the effect of stratification in coastal aquifers using a new parameter. Water Resour. Research. 54, 5948–5957. https://doi.org/10.1029/2018WR023114.

Rumynin V.G., Sindalovskiy L.N., Nikulenkov A.M., Leskova P.G. 2020. Effect of anisotropy and depth-dependent hydraulic conductivity on concentration curve response to nonpoint-source pollution. Journal of Hydrology. vol. 591.

Rumynin V.G. 2011. Subsurface Solute Transport Models and Case Histories. Dordrecht: Springer.

Strack O.D.L. 2017b. Vertically integrated flow in stratified aquifers. J. Hydrol. 548, 794–800. http://dx.doi.org/10.1016/j.jhydrol.2017.01.039.

Strack O.D.L. 2017a. Analytical Groundwater Mechanics. Cambridge Core. doi:10.1017/9781316563144.

Youngs E.G. 1990. An examination of computed steady-state water-table heights in unconfined aquifers: Dupuit-Forchheimer estimates and exact analytical results. J. Hydrol. 119, 201–214.

Румынин В.Г. 2020. Теория и методы изучения загрязнения подземных вод. Учебник для вузов. Наука.